MATRICES

Una **matriz** es un conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada uno de los números de que consta la **matriz** se denomina **elemento**. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la **fila** y la **columna** a la que pertenece.

Dimensión de una matriz

El número de filas y columnas de una matriz se denomina **dimensión** de una matriz. Así, una matriz será de dimensión: 2x4, 3x2, 2x5,... Sí la matriz tiene el mismo número de filas que de columna, se dice que es de orden: 2, 3, ...

El conjunto de **matrices** de **m filas** y **n columnas** se denota por $\mathbf{A}_{m\times n}$ o $(\mathbf{a}_{ij})$, y un **elemento** cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila i y en la columna j, por $\mathbf{a}_{ij}$.

Matrices iguales

Dos **matrices** son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.

Clasificación de matrices

Matriz fila

Una **matriz fila** está constituida por una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz columna

La **matriz columna** tiene una sola columna

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matriz rectangular

La **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su **dimensión mxn**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

La **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas.

Los elementos de la forma $\mathbf{a_{ii}}$ constituyen la **diagonal principal**.

La **diagonal secundaria** la forman los elementos con **i+j = n+1**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

En una **matriz nula** todos los elementos son ceros. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz triangular superior

En una **matriz triangular superior** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

En una **matriz triangular inferior** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

En una **matriz diagonal** todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

Una **matriz escalar** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad

Una **matriz identidad** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Dada una matriz A, se llama **matriz traspuesta** de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz regular

Una **matriz regular** es una matriz cuadrada que tiene inversa.

Matriz singular

Una **matriz singular** no tiene matriz inversa.

Matriz idempotente

Una matriz, A, es idempotente si:

$\mathbf{A^2 = A}$.

Matriz involutiva

Una matriz, A, es involutiva si:

$\mathbf{A^2 = I}$.

Matriz simétrica

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = A^t}$.

Matriz antisimétrica o hemisimétrica

Una **matriz antisimétrica o hemisimétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = -A^t}$.

Matriz ortogonal

Una matriz es ortogonal si verifica que:

$\mathbf{A \cdot A^t = I}$.

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión, **$A=(a_{ij})$** y **$B=(b_{ij})$**, se define la matriz suma como: **$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$**.

La matriz suma se obtienen sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma misma posición.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 0 & 0\\5 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 0+0 & 1+1\\3+1 & 0+2 & 0+1\\5+1 & 1+1 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\4 & 2 & 1\\6 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2-1 & 0-0 & 1-1\\3-1 & 0-2 & 0-1\\5-1 & 1-1 & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -2 & -1\\4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz **$A=(a_{ij})$** y un número real **$k \in R$**, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k.

$kA=(k\ a_{ij})$

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 0 & 0\\5 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\6 & 0 & 0\\10 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Dos matrices A y B son multiplicables si el **número de columnas de A** coincide con el **número de filas de B**.

$M_{m\times n} \times M_{n\times p} = M_{m\times p}$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene **multiplicando** cada elemento de la **fila i** de la matriz A por cada elemento de la **columna j** de la matriz B y **sumándolos**.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

El producto de una **matriz por su inversa** es igual al **matriz identidad**.

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos:

1º Construir una matriz del tipo **M = (A | I)**, es decir, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad **I** en la derecha.

Consideremos una matriz 3x3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ampliamos con la matriz identidad de orden 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2º **Utilizando el método Gauss vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}.**

$F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$(-1)\ F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa pòr determinantes

Rango de una matriz

Rango de una matriz: es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes.

Una línea es **linealmente dependiente** de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

Una línea es **linealmente independiente** de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

El rango de una matriz A se simboliza: **rang(A)** o **r(A**).

También podemos decir que el rango es: **el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula**. Utilizando esta definición se puede calcular el rango usando determinantes.

Se puede calcular el rango de una matriz por dos métodos:

Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

Podemos descartar una línea si:

Todos sus coeficientes son ceros.

Hay dos líneas iguales.

Una línea es proporcional a otra.

Una línea es combinación lineal de otras.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_3 = 2F_1$

F_4 es nula

$F_5 = 2F_2 + F_1$

r(A) = 2.

En general consiste en hacer nulas el máximo número de líneas posible, y el rango será el número de filas no nulas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$F_2 = F_2 - 3F_1$

$F_3 = F_3 - 2F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto **r(A) = 3.**