CONJUNTOS

En una Teoría Intuitiva de Conjuntos, los conceptos de "conjunto" y "pertenencia" son considerados primitivos, es decir, no se definen de un modo formal; se les acepta como existentes de manera axiomática, aún cuando son creaciones intelectuales.

Intuitivamente, un conjunto es una colección o clase de objetos bien definidos, dotados de una propiedad que permita decidir (sin ninguna ambigüedad posible), si un objeto cualquiera forma parte o no de la colección.

Consideremos, por ejemplo, los siguientes conjuntos:

1.- Las vocales: **a, e, i, o, u.**
2.- Los números enteros pares positivos: **2, 4, 6, ...**
3.- Los siete enanitos de Blancanieves.
4.- Los equipos chilenos de fútbol profesional participantes en el actual campeonato nacional.
5.- Las señoritas de nuestro curso de Matemáticas.

Los objetos que forman un conjunto se llaman elementos del conjunto, y la relación entre un elemento y un conjunto es la de pertenencia.
Se escribe $x \in A$ y se lee "(el objeto) x pertenece a (el conjunto) A"

Habitualmente los conjuntos se designan por una letra mayúscula y los elementos del conjunto por una letra minúscula y entre paréntesis de llave.

Los conjuntos se pueden definir por:

EXTENSIÓN cuando se describen exhaustivamente (es decir, nombrando a todos y cada uno de sus elementos, que, en tal caso, se escribirían entre llaves)

Ejemplo: A={ Pedro, Juan, Luis, Manuel}

COMPRENSIÓN: Cuando se indican las características de los elementos del conjunto o función proposicional **p(x)** que satisfagan todos los elementos **x** del conjunto definido y sólo ellos, dentro de un **universo contextual** ó **relativo U**".

Ejemplo: B = { números pares}

C = { números enteros positivos menores de 10 }

CONJUNTO FINITO: Es aquel que consta de un número determinado de elementos, dicho de otra forma, si al efectuar el proceso de contar los elementos, este proceso puede terminar.

CONJUNTO INFINITO: Cuando el conjunto tiene un número indeterminado de elementos, infinitamente grande.

CONJUNTO VACÍO: Es aquel conjunto que no tiene ningún elemento. Se representa por el símbolo $\varnothing$**.**

SUBCONJUNTO: Se dice que un conjunto **A** es **subconjunto** de un conjunto **B**, o bien que **A está incluido en B** si y sólo si cada elemento que pertenece a **A** pertenece también a **B**.

A está incluido en B y se anota $\mathbf{A \subset B}$**.**

Expresado de otra forma: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} = \{ x / \ x \in A \ \wedge \ x \in B \}$

Ejemplo: si A = {1, 3, 5} y B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} entonces $A \subset B$.

Si **A** no es **subconjunto** de **B** se escribe $\mathbf{A \not\subset B}$.

Se dice que **A** es SUBCONJUNTO PROPIO de **B** si y sólo si **A** es subconjunto de **B** pero **B** es distinto de **A**, lo que a veces se denota por $\mathbf{A \subset B}$, sin la barrita inferior que representa la igualdad de conjuntos.

$$A \subset B \text{ y } A \neq B$$

En alguna bibliografía se acostumbra a designar un subconjunto propio como

$$\mathbf{A \subset B}$$

Y un subconjunto como $\mathbf{A \subseteq B}$

CONJUNTOS IGUALES: Dos conjunto A y B son iguales (A = B) si

$$\forall x \in A \rightarrow x \in B \ \wedge \ \forall x \in B \rightarrow x \in A$$

se verifica que $\boldsymbol{A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$.

Para probar que dos conjuntos son iguales, será siempre necesario probar que cada uno de ellos está contenido en el otro (dos pruebas).

Este proceso se llama ***prueba por doble inclusión*.**

COMPARABILIDAD: Dos conjuntos A y B se dicen comparables si:

$$\mathbf{A \subset B} \text{ o } \mathbf{B \subset A}$$

Esto es si uno de los conjuntos es subconjunto del otro.

En cambio dos conjuntos C y D no son comparables si

$$\mathbf{C \not\subset D} \text{ y } \mathbf{D \not\subset C}$$

Nótese que si **C** y **D** no son comparables, entonces hay un elemento de **C** que no está en **D** y hay algún elemento de **D** que no está en **C.**

CONJUNTO DE CONJUNTOS: Hay ocasiones en que los elementos de un conjunto son a su vez también conjuntos, por ejemplo el conjunto de todos los subconjuntos de **A** . Para evitar decir conjunto de conjuntos se suele decir familia de conjuntos o clase de conjuntos, y para evitar mayor confusión, se emplean letras de tipo inglés.

$$\mathcal{A} \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{C} \quad \mathcal{D}$$

CONJUNTO UNIVERSAL: Es aquel conjunto del que son subconjunto toda una familia de conjuntos. Se denota con la letra **U**

Si **U** es el conjunto Universo de **A, B, C,** y **D**, entonces

$$\forall x \in A \rightarrow x \in U,$$
$$\forall y \in B \rightarrow y \in U,$$
$$\forall z \in C \rightarrow z \in U,$$
$$\forall u \in D \rightarrow u \in U,$$

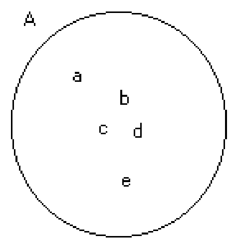
CONJUNTO POTENCIA**:** Conjunto potencia de **S** se denomina a la familia de todos los subconjuntos de **S,** y se denomina por $\mathbf{2^{S}}$**.**

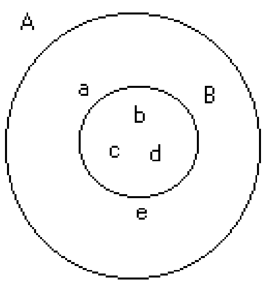
Ejemplo: Si F = { 1, 2} entonces 2^{F} = { {1, 2}, {1}, {2}, ∅ }

CONJUNTOS DISJUNTOS: Son aquellos conjuntos que no tienen ningún elemento en común. Por ejemplo: E = {1, 3, 5} y G = {2, 4, 6 } son conjuntos disjuntos.

DIAGRAMAS DE VENN EULER: Es la forma sencilla e instructiva para poder representar los conjuntos y las relaciones que se producen entre ellos. En ellos se representan habitualmente los conjuntos por un área plana, por lo general delimitada por un círculo.

A = { a, b, c, d, e}





B = { b, c, d} B ⊂ A

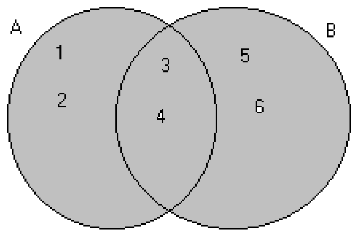
Operaciones con conjuntos

UNIÓN: La unión de dos conjuntos **A** y **B** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a **A** o a **B** o a ambos., y se representa por

A ∪ B

$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

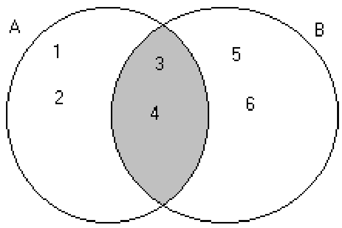
Ejemplo: Sean los conjuntos y se representa gráficamente por el diagrama de Venn



INTERSECCIÓN: La intersección de dos conjuntos A y B ($A \cap B$) es el conjunto de todos los elementos comunes a A y a B al mismo tiempo.

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

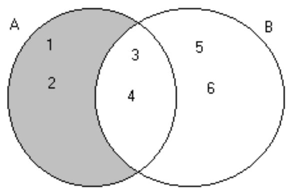
Ejemplo: Si tomamos los mismos conjuntos
A = { 1, 2, 3, 4 } y B = {3, 4, 5, 6} entonces la Intersección de A y B es $A \cap B = \{ 3, 4 \}$ y se representa gráficamente mediante el diagrama de Venn



DIFERENCIA: La diferencia entre los conjuntos A y B (A – B) o (A \ B) es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B

$A - B = A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

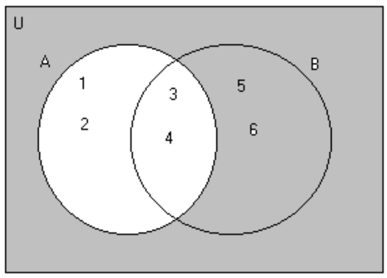
Ejemplo: Utilizando los conjuntos A = { 1, 2, 3, 4 } y B = {3, 4, 5, 6} entonces la diferencia de A y B es A - B = { 1, 2 } y se representa gráficamente mediante el diagrama de Venn



COMPLEMENTO: El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A , pero sí pertenecen a l Universo. En otras palabras es la diferencia entre el conjunto Universo y el conjunto A.

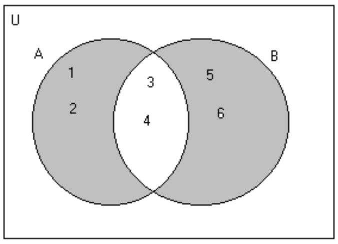
Se representa por $\mathbf{A' = A^c}$ y es igual a **U – A**

Representado en un diagrama de Venn, se tiene:



DIFERENCIA SIMÉTRICA:

Es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a **A** o a **B** pero no a ambos.



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ALGUNAS RELACIONES:

$A \Delta A =$

$A \Delta \varnothing = A$

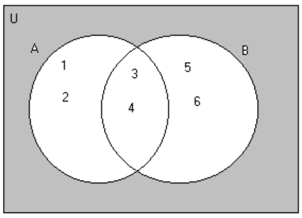
$A \Delta U = A^{c}$

$A \Delta B = B \Delta A$

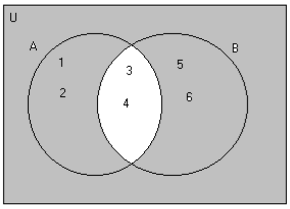
$(A \Delta B)^{c} = (A \cup B)^{c} \cup (A \cap B)$

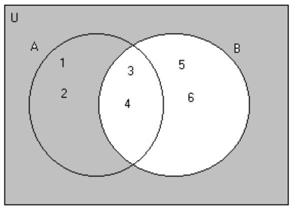
$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

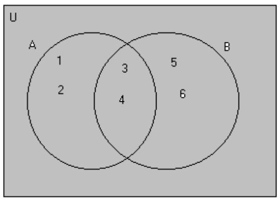
REPRESENTACIÓN DE ALGUNAS OPERACIONES:

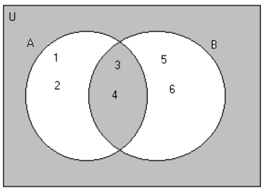


$(A \cup B)^{C}$









Ejercicios:

Dados los conjuntos: **A** = $\{n / n \in Z^{+} \wedge n \leq 13\}$

B = $\{n / n \in Z^{+} \wedge n$ es par $\wedge n \leq 20\}$

C = $\{n / n \in Z^{+} \wedge n$ es par$\}$

Encontrar : $A \cup B$, $A \cap B$, A^{c}, B^{c}, $A - B$, $B - A$, $A \Delta B$,

$B \cap C$ y $B - C$.

CARDINALIDAD DE CONJUNTOS:

Sea un conjunto A en un universo U con una cantidad determinada de elementos (finito numerable). Se define la Cardinalidad de A como la cantidad de elementos distintos del conjunto A. Se anotará n(A) o también #(A).

Ejemplo.
Si $A = \{ x \in R / 3x^2 + 7x + 2 = 0\}$, podemos decir que n(A) = 2 puesto que el discriminante de la ecuación es positivo y se infiere que tiene dos raíces reales y distintas.

Propiedades Axiomáticas:
$n(\varnothing) = 0$
$A = B \Rightarrow n(A) = n(B);$
$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Propiedades Algebraicas:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A^C) = n(U) - n(A)$
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

Aplicación a Encuesta
.
Se hace una encuesta a 600 varones respecto del uso de tres marcas de camisas: Arrow, Van Heusen y McGregor.
Se obtuvo la siguiente información :

180 varones usan Arrow pero no McGregor.
200 usan McGregor y Van Heusen.
160 usan Van Heusen pero nunca usan Arrow.
100 usan Arrow y Van Heusen pero nunca han usado McGregor.
290 nunca han usado McGregor.
50 sólo usan Van Heusen.
200 han usado sólo una (cualquiera) de estas tres marcas.

a) Distribuya la información en un diagrama adecuado a la situación.
b) Determine : i) ¿Cuántos encuestados no usan de estas camisas?
ii) ¿Cuántos encuestados sólo usan McGregor y Arrow?

Resp: i) son **10** los encuestados que no usan de estas camisas.
ii) son **100** los encuestados que usan sólo McGregor y Arrow.

Algebra de conjuntos.

Bajo las operaciones definidas en los apartados anteriores, los conjuntos satisfacen varias leyes o identidades. Observaremos que existe una dualidad entre las leyes que utilizan la intersección y las que utilizan la unión.

Leyes Idempotentes

Dado cualquier conjunto A en un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

Leyes Conmutativas

Dados dos conjuntos A y B de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

Leyes Asociativas

Dados tres conjuntos A, B y C de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Leyes Distributivas

Dados tres conjuntos A, B y C de un conjunto universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de Identidad

Dado un conjunto cualquiera de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cup U = U$
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \cap U = A$

Ley Involutiva

Dado un conjunto cualquiera A de un universal U, se verifica:

$(A^c)^c = A$

Leyes del Complemento

Dado un conjunto cualquiera A de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup A^{c} = U$
2. $U^{c} = \varnothing$
3. $A \cap A^{c} = \varnothing$
4. $\varnothing^{c} = U$

Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos A y B en un universal U, se verifica:

1. $(A \cup B)^{c} = A^{c} \cap B^{c}$
2. $(A \cap B)^{c} = A^{c} \cup B^{c}$

Otras relaciones entre Conjuntos

$A - A = \varnothing$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \rightarrow A = A$

$(A \subseteq B) \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A$

$(A \subseteq B) \leftrightarrow A - B = \varnothing$