Apuntes de Lógica

Profesor: Haroldo Cornejo Olivari

1.1 INTRODUCCION

La matemática estudia las propiedades de ciertos objetos, tales como números, operaciones, conjuntos, etc.
Es necesario por lo tanto contar con un lenguaje apropiado para expresar estas propiedades de manera precisa. Desarrollaremos aquí un lenguaje que cumpla estos requisitos, al cuál llamaremos lenguaje matemático.
Aunque algunas de estas propiedades son evidentes, la mayoría de ellas no lo son y necesitan de una cierta argumentación que permita establecer su validez. Es fundamental por lo tanto conocer las principales leyes de la lógica que regulan la corrección de estos argumentos. Desarrollaremos aquí los conceptos de verdad, equivalencia y consecuencia lógica y algunas de sus aplicaciones al razonamiento matemático.

1.2 LENGUAJE MATEMATICO

El lenguaje matemático está formado por una parte del lenguaje natural, al cuál se le agregan variables y símbolos lógicos que permiten una interpretación precisa de cada frase.

1.21 Proposiciones.

Llamaremos proposiciones a aquellas frases del lenguaje natural sobre las cuales podamos afirmar que son verdaderas o falsas.
Ejemplos de proposiciones son:

"Dos es par".
"Tres es mayor que siete".
"Tres más cuatro es nueve
"Si dos es mayor que cinco entonces dos es par".
"Dos no es par"

En cambio las siguientes frases no son proposiciones:

"¿Es dos número par?".
"Dos más tres".
"¡Súmale cinco!".

Se acostumbra habitualmente usar las letras p, q, r, s..... etc. para designar proposiciones.

Una proposición es simple, si ninguna parte de ella es a su vez una proposición.

Ejemplos de proposiciones simples:

“Dos es un número par".
"Tres es mayor que cuatro".
"Tres más cinco es mayor que cuatro".

Se usan letras minúsculas p, q, r, s,...etc., para denotar proposiciones simples.

La propiedad fundamental de una proposición, es que ella puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

El **valor de verdad** de una proposición simple depende exclusivamente si el enunciado de la proposición, es Verdadero o Falso.

Por ejemplo, las proposiciones:

“Dos es un número par".	Es verdadero.
"Tres es mayor que cuatro".	Es Falso.
"Tres más cinco es mayor que cuatro".	Es Verdadero.

Algunos enunciados o proposiciones son compuestos, es decir, están formados de proposiciones simples y de conectivos que los unen.

El valor de verdad de una proposición compuesta depende completamente del valor de verdad de cada proposición simple y del modo como se les reúne o conecta para formar la proposición compuesta.

1.2.2 Conectivos

Se mencionó que una proposición puede estar compuesta a su vez por una o varias proposiciones simples, conectadas por una palabra o frase que se llama conectivo.

Los conectivos más usados son:

(1) **Negación.** Es aquel conectivo que niega la proposición, y normalmente se utiliza anteponiendo “no”, o anteponiendo la frase es falso que.

Simbólicamente la negación se puede representar en lenguaje matemático, de tres formas diferentes:

I.- Anteponiendo el símbolo **“$\neg$”** .-	Por ejemplo “ $\neg$p” significa “no p”.
II.- Sobreponiéndole una barra **“ $\overline{\ }$ ”.-**	Por ejemplo “$\overline{p}$” significa “no p”.
III.- Anteponiendo el símbolo **“~”** .-	Por ejemplo “ ~p” significa “no p”.

Consideremos la proposición

"dos no es par".

La proposición está compuesta por la proposición simple "dos es par" y por la palabra "no", que forma la negación.

Si p es una proposición, $\neg$p denotará la proposición “no es verdad que p".

Valores de verdad de la negación:

p	$\neg$p
V	F
F	V

(2) **Conjunción.** Es aquel conectivo que une dos proposiciones, incluyéndolas obligatoriamente a ambas. Se utiliza “y” como conectivo de conjunción.

La conjunción "y" se abrevia o representa con el símbolo "$\wedge$"

Consideremos la proposición

"dos es par y tres es impar

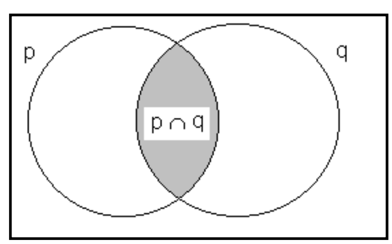
la cual está compuesta por las proposiciones simples "dos es par y "tres es impar", conectadas por la palabra "y", que constituye el conectivo conjunción.

Si p y q son dos proposiciones, usaremos (p $\wedge$ q) para denotar la proposición "p y q".

Valores de verdad de la conjunción:

P	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción $\wedge$ es equivalente a la intersección $\cap$ de dos conjuntos



(3) **Disyunción**. Es aquel conectivo que une dos proposiciones ofreciendo una alternativa entre una proposición o la otra, así como también ofrece la posibilidad que sean ambas.

La disyunción "o" se abrevia o representa por el símbolo "$\vee$"

Consideremos la proposición

"dos es mayor que siete o siete es mayor que dos".

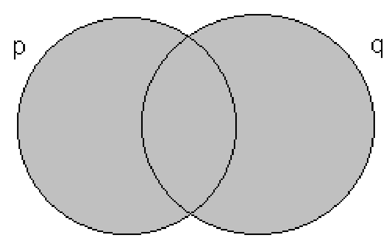
La proposición está compuesta por las proposiciones simples "dos es mayor que siete" y " siete es mayor que dos", conectadas por la palabra "o", que constituye el conectivo de disyunción.

Si p y q son dos proposiciones, "p o q" se representa por ($p \vee q$).

Valores de verdad de la disyunción:

P	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción $\vee$ es equivalente a la unión $\cup$ de dos conjuntos



$p \cup q$

DISYUNCIÓN EXCLUYENTE:

Es la disyunción, pero su valor de verdad acepta una sola proposición como verdadera.
No pueden ocurrir las dos proposiciones al mismo tiempo.

Ejemplo: Me caso con Rosita o con Doris
Hoy a las 3 voy al Parque Arauco o al Alto Las Condes.

- Su notación es $p \veebar q$

(4) Implicación o Condicional: Es aquél conectivo en el que se establece una condición para que se cumpla la otra proposición. Esta normalmente se establece como: "Si se cumple p, entonces se cumple q"

Consideremos la proposición

"si dos es par entonces tres es impar".

La proposición está compuesta por las dos proposiciones simples "dos es par" y "tres es impar", conectadas por las palabras "**si..., entonces.**..", que constituyen el conectivo implicación.

La implicancia o condición se representa por el símbolo ($p \rightarrow q$) que representa "si p entonces q".

Valores de verdad de la implicancia:

P	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación

Notemos que en el caso de la implicación, si p es falsa, automáticamente ($p \rightarrow q$) es verdadera y en este caso se dice que es **trivialmente verdadera.**

(5) **Bicondicional o doble implicancia.** Es aquel conectivo de la forma "se cumple p si y solamente si se cumple q". Esto significa que también se cumple la situación inversa, es decir que como se cumple q, también se cumple p

Consideremos la proposición

"dos es mayor que siete ***si y sólo si*** siete es menor que dos".

La proposición está compuesta por las proposiciones simples "dos es mayor que siete" y " siete es menor que dos", conectadas por las palabras "***si y sólo si***", que constituyen el conectivo bicondicional.

Denotamos por ($p \leftrightarrow q$) a la proposición "p ***si y sólo si*** q".

Valores de verdad de la bicondicional:

P	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2.3 Ejemplos.

Usando símbolos matemáticos conocidos y símbolos para los conectivos, podemos expresar las siguientes proposiciones:

(a) " Si dos es par entonces tres es impar (2 es par $\rightarrow$ 3 es impar).
(b) "No es verdad que dos es par o impar". (2 es par $\vee$ 2 es impar).
(c) "Si no es verdad que cinco es menor que siete entonces cinco es mayor que siete o cinco es igual que siete”.

$$\neg(5 < 7) \rightarrow (5 > 7 \vee 5 = 7)$$

(2) Usando además los siguientes símbolos:

p : "2 es par," q: "3 es impar,"
r: "5 < 7"' s: "5> 7"
t : "5 = 7”,

podemos expresar:

(a) " Si dos es par entonces tres es impar".

$$(p \rightarrow q).$$

(b) "No es verdad que dos es par o tres es impar".

$$\neg(p \vee q).$$

(c) "Si no es verdad que cinco es menor que siete entonces cinco es mayor que siete o cinco es igual que siete".

$$(\neg r \rightarrow (s \vee t))$$

Ejercicio:

Si p = “Hace frío” y q = “Está lloviendo”, escribir en un enunciado verbal tradicional, las siguientes proposiciones:

a) $\neg p$
b) $p \wedge q$
c) $p \vee q$
d) $q \rightarrow p$
e) $p \rightarrow \neg q$
f) $q \vee \neg p$
g) $\neg p \wedge \neg q$
h) $p \leftrightarrow q$
i) $\neg\neg q$
j) $(p \wedge \neg q) \rightarrow p$

Respuestas:

a) No hace frío.
b) Hace frío y está lloviendo.
c) Hace frío o está lloviendo.
d) Está lloviendo si, y sólo si, hace frío.
e) Si hace frío, entonces no está lloviendo.
f) Está lloviendo o no hace frío.
g) No hace frío y no está lloviendo.
h) Hace frío si, y sólo si, no está lloviendo.
i) No es verdad que no está lloviendo ó Está lloviendo.
j) Si hace frío y no está lloviendo, entonces hace frío.

Ejercicio:

Sean las proposiciones: p = “Es grande” y q = “Está maduro”
Escribir los siguientes enunciados verbales en forma simbólica, usando p, q y los correspondientes conectivos.

1) Es grande y está maduro.
2) Es grande, pero no está maduro.
3) Es falso que sea grande o esté maduro.
4) No es grande ni está maduro.
5) Es grande , o es pequeño y maduro.
6) No es cierto que sea pequeño o que no esté maduro.

Respuestas:

1) $p \wedge q$
2) $p \wedge \neg q$
3) $\neg(p \vee q)$

4) $\neg p \wedge \neg q$
5) $p \vee (\neg p \wedge q)$
6) $\neg(\neg p \vee \neg q)$

1.2.4 Verdad lógica o Tautología. Son aquellas proposiciones que siempre son verdad, sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Consideremos la proposición $((p \wedge q) \rightarrow p)$.

Esta, es verdadera independientemente del valor de verdad de p y de q como podemos ver al hacer la siguiente tabla llamada tabla de verdad de la proposición:

p	q	$p \wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Este tipo de proposiciones se llaman **verdades lógicas o Tautología**..

Por el contrario si consideramos la proposición

$$((p \vee q) \rightarrow p)$$

y hacemos su tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)\rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

observamos que ésta es verdadera sólo para algunos valores de verdad de p y q. Esta proposición no es una verdad lógica, y se le designa como **contingencia.**

1.2.5. Contingencia: Son aquellas proposiciones que pueden ser verdad o falso, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones que le componen.

El método de las tablas de verdad para verificar una verdad lógica sirve solamente cuando se trata de proposiciones sin variables ni cuantificadores.

1.2.6. Contradicciones. Son aquellas proposiciones que siempre son falsas, sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Si consideramos la proposición

$$(p \wedge \neg p),$$

vemos que ésta es siempre falsa, cualquiera que sea el valor de verdad de p como podemos observar al hacer la tabla de verdad de la proposición:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Este tipo de proposiciones se llaman **contradicciones**.

1.3. Predicados.

Consideremos proposiciones en las que hemos reemplazado uno o más nombres de objetos por letras como: x, y, z, u, etc. Por ejemplo, las siguientes:

"x es positivo"
"y es par"
"x es mayor que y"
"x es mayor que y más z
"Si x es mayor que 5, entonces x es positivo".

Estas frases se llaman predicados y las letras usadas se llaman variables. Los predicados no son verdaderos ni falsos, pero al reemplazar las variables por nombres de objetos se transforman en proposiciones.

Como en el caso de las proposiciones, los predicados pueden estar compuestos por otros más simples ligados entre sí por conectivos. Por ejemplo, el predicado: "x es par o x es primo" está compuesto por los predicados simples: "x es par" y "x es primo" unidos por el conectivo o.

Como notación usamos:

Letras minúsculas seguidas de las variables correspondientes: p(x), q(x, y),...etc., para denotar predicados simples.

1.3.1. Ejemplos.

(1) Usando símbolos matemáticos conocidos y símbolos para los conectivos, podemos expresar los siguientes predicados:

(a) "Si x es par entonces x no es impar”.

$$(x \text{ es par} \rightarrow \neg (x \text{ es impar})).$$

(b) "x es mayor que y si y solo si no es verdad que x es menor que y o que x es igual a y.

$$(x > y \leftrightarrow \neg (x < y \vee x = y)).$$

(2) Usando además los siguientes símbolos:

p(x) : "x es par," q(x) : "x es impar,"
r(x, y) : "x > y", s(x, y) : "x <y"
t: "x =y",

podemos expresar:

(a) "Si x es par entonces x no es impar".

$$(p(x) \rightarrow \neg\ q(x)).$$

(b) "x es mayor que y si y sólo si no es verdad que x es menor que y o que x es igual a y.

$$(r (x, y) \leftrightarrow \neg(s(x, y) \vee t(x, y))).$$

1.3.2. Cuatificadores.

A partir de un predicado se puede obtener una proposición anteponiendo una frase llamada cuantificador Los cuantificadores más usados son:

(1) Cuantificador universal.

Consideremos el predicado: “ x es positivo",

y antepongámosle la frase "para todo número x se tiene que".

Obtenemos la proposición

para todo número x se tiene que x es positivo",

cuyo significado es equivalente al de la proposición "todo número es positivo".

La frase "para todo x" constituye el cuantificador universal

(2) Cuantificador existencial.

Si al mismo predicado "x es positivo",

le anteponemos la frase "existe un número x tal que",

obtenemos la proposición

"existe un número x tal que x es positivo",

cuyo significado es equivalente al de la proposición

"existen números positivos".

La frase " existe un x constituye el cuantificador existencial.

(3) Cuantificador "existe un único"

Si anteponemos al mismo predicado **"x es positivo",**

la frase **"existe un único número x tal que"**,

obtenemos la proposición **"existe un único número x tal que x es positivo",**

cuyo significado es equivalente al de la proposición

"existe un único número positivo".

La frase "existe un único x"

constituye el cuantificador "existe un único"

En todo cuantificador se debe especificar el tipo de objetos involucrados en la afirmación, y para hacer esto se usan colecciones o conjuntos de objetos que se denotan por letras mayúsculas: A, B, C,...etc.

Como notación usamos:

$\forall$ x $\in$A p(x): "para todo x elemento de la colección A, p(x)."
$\exists$ x $\in$A q(x): "existe al menos un elemento x de la colección A tal que q(x)."
$\exists$! x $\in$A r(x): "existe un único elemento x de la colección A tal que r(x).".

p(a) denota la proposición obtenida de p(x) al reemplazar x por a.

Notemos que si se tiene un predicado con dos variables diferentes, es necesario anteponer dos cuantificadores para obtener una proposición. Por ejemplo, a partir del predicado $x < y$ se pueden obtener entre otras:

$\forall x \in A\ \forall y \in A(x < y)$,
$\exists x \in A\ \forall y \in A(x < y)$,
$\forall x \in A\ \exists y \in A(x < y)$,
$\exists x \in A\ \exists y \in A(x < y)$
$\forall y \in A\ \exists x\ A(x < y)$.

1.3.3. Ejemplo.

Sea N el conjunto de los números naturales. Entonces podemos expresar:

1. "Todo número natural impar es primo”
   $\forall x \in N$(x es impar $\rightarrow$ x es primo).

2. "Existen números naturales impares que no son primos"
   $\exists x \in N$(x es impar $\wedge \neg$(x es primo)).

3. "Existe un único número natural primo que no es impar"
   $\exists x \in N$(x es primo $\wedge$ (x es impar)).

1.3.4. Ejemplo.

Sea N el conjunto de los números naturales. Usando los símbolos matemáticos usuales y los símbolos lógicos, podemos expresar las siguientes proposiciones:

(1) Dos más dos es ocho:
$2 + 2 = 8$.

(4) Todo número natural es par:

$\exists x \in N$ (x es par).

(5) Si dos es par, todo número natural es par:

(2 es par $\rightarrow \forall x \in N$ (x es par)).

(4) Si uno es par, entonces 3 no es par:

(1 es par $\rightarrow$ (3 es par)).

(5) Todo número natural mayor que cinco es par:

$\forall x \in N(x > 5 \rightarrow x$ es par).

(6) Hay números naturales pares mayores que cinco:

$\exists x \in N(x$ es par $\wedge x > 5)$.

(7) El producto de dos números naturales pares, es par:

$\forall x \in N \forall y \in N((x$ es par $\wedge y$ es par$) \rightarrow x \cdot y$ es par).

(8) Existe un único número natural cuyo cuadrado es cuatro:

$\exists! x \in N(x^2 = 4)$.

(9) No hay un número natural que sea mayor que todo número natural:

$\neg\exists x \in N \forall y \in N(x > y)$.

(10) El cuadrado de la suma de dos números naturales es igual al cuadrado del primero más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$\forall x \in N \forall y \in N((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$

1.4 LAS LEYES DE LA LOGICA

1.4.1 Verdad.

La verdad de una proposición simple depende solamente de su contenido. Por ejemplo las proposiciones "$2 < 3$"' "2 es par" y "3 es impar" son verdaderas y por el contrario, "$4 = 5$" y "$(2\cdot5 + 1) > (3^2 \cdot 10)$" son falsas.
En cambio la verdad de una proposición compuesta depende además de la verdad o falsedad de sus componentes más simples y está dada por las siguientes reglas, donde p y q son proposiciones, p(x) es un predicado y A es un conjunto:

(1) $\neg p$ es verdadero si y solamente si p es falso.

(2) $(p \vee q)$ es verdadera si y solamente si al menos una de ellas, p o q , es verdadera.

(3) $(p \wedge q)$ es verdadera si y solamente si ambas p y q son verdaderas.

(4) $(p \rightarrow q)$ es verdadera si y solamente si en el caso que p sea verdadera también q es verdadera.

(5) $(p \leftrightarrow q)$ es verdadera si y solamente si ambas, p y q son verdaderas o ambas son falsas.

(6) $\forall x \in A\ p(x)$ es verdadera si y solamente si para todo elemento a de A se tiene que p(a) es verdadera.

(7) $\exists\ x \in A\ p(x)$ es verdadera si y solamente si existe al menos un elemento a de A tal que p(a) es verdadera.

(8) $\exists!\ x \in A\ p(x)$ es verdadera sí y solamente si existe un único elemento a de A tal que p(a) es verdadera.

1.4.2 Ejemplos.

Sea N el conjunto de los números naturales. Entonces,

(1) $(2 < 3 \vee 4 = 5)$ es verdadera porque "$2 <3$" es verdadera.

(2) $(2< 3 \wedge 4 = 5)$ es falsa porque "$4 = 5$" es falsa.

(3) $(2 < 3 \rightarrow 4 = 5)$ es falsa porque $2 < 3$ es verdadera y $4 = 5$ es falsa.

(4) $(2 < 3 \rightarrow 3 <4)$ es verdadera porque ambas son verdaderas.

(5) $(2 > 3 \rightarrow 4 = 5)$ es trivialmente verdadera porque $2 > 3$ es falsa.

(6) $(2 < 3 \leftrightarrow 5 > 1)$ es verdadera porque ambas son verdaderas.

(7) $(2 > 3 \leftrightarrow 4 = 5)$ es verdadera porque ambas son falsas.

(8) $\forall x \in N(x > 2)$ es falsa porque $1 \in N$ y no se cumple que $1 > 2$.

(9) $\exists\ x \in N(x > 2)$ es verdadera porque $3 \in N$ y $3 > 2$.

(10) $\forall x \in N\ (x > 2 \vee x \leq 2)$ es verdadera, porque si $a \in N$ entonces $(a > 2 \vee a \leq 2)$ es verdadera y esto último es cierto porque o bien $a > 2$ o bien $a < 2$.

(11) $\exists!\ X \in N(x > 2)$ es falsa, porque 3 y $4 \in N$, $3 >2$, $4 > 2$ y $4 \# 3$.

(12) $\forall x \in N(x > 4 \rightarrow x + 3 > 7)$ es verdadera porque si $a \in N$ se tiene que $(a > 4 \rightarrow a + 3 > 7)$ es verdadera, y esto último es cierto porque si $a > 4$, sumando tres se obtiene que:

$$a + 3 > 7.$$

(13) $\forall x \in N \, \forall y \in N((x > 1 \wedge y > 1) \rightarrow x \cdot y < 1)$ es falsa, porque $2 \in N$, $3 \in N$ y $((2 > 1 \wedge 3 > 1) \rightarrow 2 \cdot 3 < 1)$ es falsa y esto último se debe a que $2 > 1$ y $3 > 1$ y no se cumple que $2 \cdot 3 < 1$.

(14) $\forall x \in N \, \exists y \in N(x < y)$ es verdadera, pues si $a \in N$, entonces $a + 1 \in N$ y $a < a+1$.

(15) $\exists x \in N \, \forall y \in N \, (y < x)$ es falsa porque si $a \in N$, entonces $a + 1 \in N$ y no se cumple que $a + 1 < a$.

Notemos que para ver que una proposición de la forma $\forall x \in A \; p(x)$ es falsa, basta encontrar un objeto a de A que no cumpla con p(a). Este objeto se llama contraejemplo de la proposición dada.

Por ejemplo, en (8) del ejemplo anterior, $x = 1$ es un contraejemplo para la proposición $\forall x \in N \, (x > 2)$.

1.4.3 Verdad lógica. Son aquellas proposiciones que siempre son verdad, sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Consideremos la proposición $((p \wedge q) \rightarrow p)$.

Esta, es verdadera independientemente del valor de verdad de p y de q como podemos ver al hacer la siguiente tabla llamada tabla de verdad de la proposición:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Este tipo de proposiciones se llaman **verdades lógicas o Tautología**..

Por el contrario si consideramos la proposición

$$((p \vee q) \rightarrow p)$$

y hacemos su tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

vemos que ésta es verdadera sólo para algunos valores de verdad de p y q. Esta proposición no es una verdad lógica, y se le designa como **contingencia.**

Contingencia: Son aquellas proposiciones que pueden ser verdad o falso, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones que le componen.

El método de las tablas de verdad para verificar una verdad lógica sirve solamente cuando se trata de proposiciones sin variables ni cuantificadores. Por ejemplo, la proposición

$$\forall x \in A(p(x) \vee \neg p(x))$$

es lógicamente verdadera pues si a es un objeto de la colección A, o bien se cumple p(a) o bien su negación $\neg p(a)$, y por lo tanto $(p(a) \vee \neg p(a))$ es siempre verdadera.
En este caso no se puede usar tablas de verdad porque la verdad de ésta depende del universo A y de si para cada objeto a de A se cumple p(a) o no.

1.4.4 Contradicciones. Son aquellas proposiciones que siempre son falsas, sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Si consideramos la proposición

$$(p \wedge \neg p),$$

vemos que ésta es siempre falsa, cualquiera que sea el valor de verdad de p como podemos observar al hacer la tabla de verdad de la proposición:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Este tipo de proposiciones se llaman **contradicciones**.

También existen contradicciones en el lenguaje con variables. Por ejemplo la proposición

$$(\forall x \in A\ p(X) \wedge \exists x \in A\ (\neg p(x)))$$

que es siempre falsa pues si para todo a $\in$ A se cumple p(a), entonces no existe a $\in$ A tal que $\neg$p(a).

1.4.5 Verdades lógicas usuales.

Ley de Idempotencia

$p \vee p \leftrightarrow p$
$p \wedge p \leftrightarrow p$

Ley Asociativa

$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Ley Conmutativa

$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

Ley Distributiva

$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Ley de Identidad

$p \vee F \leftrightarrow p$
$p \vee V \leftrightarrow V$
$p \wedge V \leftrightarrow p$
$p \wedge F \leftrightarrow F$

Leyes de DeMorgan

$\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
$\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

Ley de Absorción

$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

Leyes del Complemento

$p \vee \overline{p} \equiv V$

$p \wedge \overline{p} \equiv F$

$\overline{\overline{p}} \leftrightarrow p$

$\overline{V} \equiv F$

$\overline{F} \equiv V$

$\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

$(\overline{p \leftrightarrow q}) \leftrightarrow (\overline{p} \leftrightarrow q)$

$\overline{p \leftrightarrow q} \leftrightarrow ((p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})$

$(\overline{p} \rightarrow (q \wedge \overline{q})) \leftrightarrow p$

1.4.6 Otras proposiciones lógicamente verdaderas

$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r))$

$((p \rightarrow q) \wedge (\overline{p} \rightarrow q)) \leftrightarrow q$

$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow q)$

$((p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$

$((p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$

$((p \wedge r) \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \rightarrow (r \rightarrow q))$

Ejercicio:

Simplificar las siguientes proposiciones:

1) $\neg(p \vee \neg q)$
2) $\neg(\neg p \rightarrow q)$
3) $\neg(p \wedge \neg q)$
4) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$
5) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$
6) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

Respuestas:

1) $\neg(p \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg\neg q \equiv \neg p \wedge q$
2) $\neg(\neg p \rightarrow q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

3) $\neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee \neg\neg q \equiv \neg p \vee q$
4) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg\neg p \vee \neg\neg q \equiv p \vee q$
5) $\neg(\neg p \leftrightarrow q) \equiv \neg\neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow q$
6) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg\neg q \equiv \neg p \wedge q$

1.5. APLICACIONES

Si en el trabajo matemático se quiere establecer una propiedad que no es evidente, se debe dar un argumento acerca de su verdad, basado en todas las propiedades obtenidas previamente. Este argumento se llama demostración.

Una demostración es una cadena de implicaciones y en cada paso de ella se obtiene una nueva verdad, ya sea porque es una verdad lógica o porque es equivalente a otra anterior o porque es consecuencia de verdades obtenidas anteriormente.

Si en el trabajo matemático se quieren introducir nuevos objetos, se debe dar una explicación de éstos en términos de los objetos ya conocidos. Esta explicación se llama definición.

Las definiciones son igualdades entre nombres de objetos o equivalencias entre predicados y pueden ser usados como tales en las demostraciones.

1.5.1. Negación de una proposición dada.

Negar una proposición dada es encontrar una proposición equivalente a su negación que contenga el símbolo de negación sólo ante proposiciones simples, dado que para interpretar mas fácilmente el símbolo de negación es conveniente que éste aparezca siempre ante proposiciones simples.

Por ejemplo, dada la proposición, que afirma que la operación “ · ” es conmutativa en el conjunto A:

$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (x \cdot y = y \cdot x)$

Esta se interpreta por:

"dado dos objetos cualesquiera a y b de A se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$".

Su negación , que afirma que la operación “ · ” no es conmutativa en A es:

$\neg\forall x \in A\ \forall y \in A\ (x \cdot y = y \cdot x)$

La que se interpreta por:

"no es cierto que dados dos objetos cualesquiera a y b de A se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$", la cual es equivalente a:

"existen objetos a y b de A tales que no cumplen con a · b = b · a"

y por lo tanto equivalente con

"existen objetos a y b de A tales que a · b $\neq$ b · a".

Para negar una proposición con cuantificador, se niega el cuantificador en forma independiente de la proposición, la que se niega de acuerdo a las reglas normales de negación, vistas anteriormente.

Para Negar un cuantificador:

1) $\neg \forall \equiv \exists$
2) $\neg \exists \equiv \forall$

Por ejemplo:

Negar la proposición $\forall x \exists y (x + y = 5 \rightarrow x = y)$

$$\overline{\forall x \exists y (x + y = 5 \rightarrow x = y)} \leftrightarrow \overline{\forall} x \, \overline{\exists} y \overline{(x + y = 5 \rightarrow x = y)} \leftrightarrow \exists x \forall y (x + y = 5 \wedge \overline{x = y})$$

$$\boxed{\exists x \forall y (x + y = 5 \wedge x \neq y)}$$

REGLAS DE INFERENCIAS

MODUS PONENDO PONENS (PP)

$p \rightarrow q$	“Si llueve, entonces las calles se mojan”	(premisa)
p	“Llueve”	(premisa)
q	“Luego, las calles se mojan”	(conclusión)

El condicional o implicación es aquella operación que establece entre dos enunciados una relación de causa-efecto. La regla **‘ponendo ponens’** significa, “afirmando afirmo” y en un condicional establece, que si el antecedente (primer término, en este caso p) se afirma, necesariamente se afirma el consecuente (segundo término, en este caso q).

MODUS TOLLENDO TOLLENS (TT)

‘Tollendo tollens’ significa “negando, niego”, y se refiere a una propiedad inversa de los condicionales, a los que nos referíamos en primer lugar.

$p \rightarrow q$	“Si llueve, entonces las calles se mojan”
$\neg q$	“Las calles no se mojan”
$\neg p$	“Luego, no llueve”

Si de un condicional, aparece como premisa el consecuente negado (el efecto), eso nos conduce a negar el antecedente (la causa), puesto que si un efecto no se da, su causa no ha podido darse.

Esto nos permite formular una regla combinada de las ambas anteriores, consecuencia ambas de una misma propiedad de la implicación; la regla ***ponendo ponens*** sólo nos permite afirmar si está afirmado el antecedente (el primer término de la implicación), y la regla ***tollendo tollens*** sólo nos permite negar a partir del consecuente (segundo término de la implicación); ambas consecuencias se derivan de que la implicación es una flecha que apunta en un único sentido, lo que hace que sólo se pueda afirmar a partir del antecedente y negar sólo a partir del consecuente.

DOBLE NEGACIÓN (DN)

$\neg\neg p \leftrightarrow p$

El esquema representa, “p doblemente negada equivale a p”. Siguiendo el esquema de una inferencia por pasos, la representaríamos así:

$\neg\neg p$ “No ocurre que Ana no es una estudiante”

---

p “Ana es una estudiante”

La regla ‘doble negación’, simplemente establece que si un enunciado está doblemente negado, equivaldría al enunciado afirmado.

ADJUNCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN

Adjunción (A): Si disponemos de dos enunciados afirmados como dos premisas separadas, mediante la adjunción, podemos unirlos en una sola premisa utilizando el operador Λ (conjunción).

p “Juan es cocinero”

q “Pedro es policía”

$p \wedge q$ “Juan es cocinero y Pedro es policía”

Simplificación (S): obviamente, es la operación inversa. Si disponemos de un enunciado formado por dos miembros unidos por una conjunción, podemos hacer de los dos miembros dos enunciados afirmados por separado.

$p \wedge q$ “Tengo una manzana y tengo una pera”

---

p “Tengo una manzana”

q “Tengo una pera”

MODUS TOLLENDO PONENS (TP)

La disyunción, que se simboliza con el operador V, representa una elección entre dos enunciados. Ahora bien, en esa elección, forma parte de las posibilidades escoger ambos enunciados, es decir, la verdad de ambos enunciados no es incompatible, si bien, ambos no pueden ser falsos.

A partir de lo anterior, se deduce la siguiente regla, denominada ***tollendo ponens*** (negando afirmo): si uno de los miembros de una disyunción es negado, el otro miembro queda automáticamente afirmado, ya que uno de los términos de la elección ha sido descartado.

p V q	"He ido al cine o me he ido de compras"
¬q	"No he ido de compras"

---

p	"Por tanto, he ido al cine"

LEY DE LA ADICIÓN (LA)

Dado un enunciado cualquiera, es posible expresarlo como una elección (disyunción) acompañado por cualquier otro enunciado.

a	"He comprado manzanas"

---

a V b	"He comprado manzanas o he comprado peras"

SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH)

Dados dos implicaciones, de las cuales, el antecedente de la una sea el consecuente de la otra (el mismo enunciado), podemos construir una nueva implicación cuyo antecedente sea el de aquella implicación cuya consecuencia sea el antecedente de la otra implicación, y cuyo consecuente sea el de ésta última, cuyo antecedente era consecuencia del primero.

Expresado de otro modo, si una causa se sigue una consecuencia, y ésta consecuencia es a su vez causa de una segunda consecuencia, se puede decir que esa primera causa es causa de esa segunda consecuencia, del mismo modo que, si una bola de billar roja golpea a otra bola blanca que a su vez golpea a una bola negra, la bola roja es causa del movimiento de la bola negra. Expresado en forma de inferencia lógica:

$p \rightarrow q$ "Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola blanca se mueve"

$q \rightarrow r$ "Si la bola blanca golpea a la bola negra, la bola negra se mueve"

$p \rightarrow r$ "Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola negra se mueve"

SILOGISMO DISYUNTIVO (DS)

Dadas tres premisas, dos de ellas implicaciones, y la tercera una disyunción cuyos miembros sean los antecedentes de los condicionales, podemos concluir en una nueva premisa en forma de disyunción, cuyos miembros serían los consecuentes de las dos implicaciones. Lógicamente, si planteamos una elección entre dos causas, podemos plantear una elección igualmente entre sus dos posibles efectos, que es el sentido de esta regla.

$p \rightarrow q$ "Si llueve, entonces las calles se mojan"

$r \rightarrow s$ "Si la tierra tiembla, los edificios se caen"

$p \vee r$ "Llueve o la tierra tiembla"

$q \vee s$ "Las calles se mojan o los edificios se caen"

SIMPLIFICACIÓN DISYUNTIVA (SD)

Si disponemos de dos premisas que corresponden a dos implicaciones con el mismo consecuente, y sus antecedentes se corresponden con los dos miembros de una disyunción, podemos concluir con el consecuente de ambas implicaciones.

$p \vee q$ "Helado de fresa o helado de vainilla"

$p \rightarrow r$ "Si tomas helado de fresa, entonces repites"

$q \rightarrow r$ "Si tomas helado de vainilla, entonces repites"

---

r Luego, repites

LEY CONMUTATIVA

Esta ley, no es válida para la implicación, pero sí para conjunción y para la disyunción. Una conjunción es afirmar que se dan dos cosas a la vez, de modo que el orden de sus elementos no cambia este hecho. Igualmente, una disyunción es presentar una elección entre dos cosas, sin importar en qué orden se presente esta elección. Así pues,

$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ "«p y q» equivale a «q y p»"

$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ "«p ó q» equivale a «q ó p»

LEYES DE MORGAN (DM)

Esta ley permite transformar una disyunción en una conjunción, y viceversa, es decir, una conjunción en una disyunción. Cuando se pasa de una a otra, se cambian los valores de afirmación y negación de los términos de la disyunción/conjunción así como de la propia operación en conjunto, como podemos observar aquí:

$$\frac{p \wedge q}{\neg(\neg p \vee \neg q)} \qquad \frac{p \vee q}{\neg(\neg p \wedge \neg q)}$$