EJERCICIOS DE LOGICA MATEMATICA

A) Usando tablas demostrar:

1) $(p')' \Leftrightarrow p$

p	p'	$(p')'$
V	F	V
F	V	F

2) $p \wedge p' \Leftrightarrow F$

p	p'	$p \wedge p'$
V	F	F
F	V	F

3) $p \vee p' \Leftrightarrow V$

p	p'	$p \vee p'$
V	F	V
F	V	V

4) $p \vee V \Leftrightarrow V$

p	V	$p \vee V$
V	V	V
F	V	V

5) $p \wedge V \Leftrightarrow p$

p	V	$p \wedge V$
V	V	V
F	V	F

6) $p \vee F \Leftrightarrow p$

p	F	$p \vee F$
V	F	V
F	F	F

7) $p \wedge F \Leftrightarrow F$

p	F	$p \wedge F$
V	F	F
F	F	F

8) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

9) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

10) $(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'$

p	q	p’	q’	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

11) $(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$

p	q	p’	q’	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

12) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

13) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

14) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F

15) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

16) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

17) $p' \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

p	q	p’	$p' \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

18) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

19) $p \uparrow q \Leftrightarrow (p \wedge q)'$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \uparrow q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

20) $p \downarrow q \Leftrightarrow (p \vee q)'$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p \downarrow q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

21) $p \oplus q \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \wedge q)'$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)'$	$p \oplus q$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F

B) A partir de los conectivos negación (‘) y disyunción ($\vee$) se definen:

$p \wedge q =_{def} (p' \vee q')'$
$p \rightarrow q =_{def} p' \vee q$
$p \leftrightarrow q =_{def} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \oplus q =_{def} (p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$
$p \uparrow q =_{def} (p \wedge q)'$
$p \downarrow q =_{def} (p \vee q)'$

Utilizando esas definiciones y las leyes de lógica matemática, demostrar las siguientes tautologías:

1) $p \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; q' \rightarrow p'$

$q' \rightarrow p' \Leftrightarrow (q')' \vee p'$ (Definición)
$\Leftrightarrow q \vee p'$ (Doble Negación)
$\Leftrightarrow p' \vee q$ (Conmutatividad)
$\Leftrightarrow p \rightarrow q$ (Definición)

2) $(p \rightarrow q)' \;\Leftrightarrow\; p \wedge q'$

$(p \rightarrow q)' \Leftrightarrow (p' \vee q)'$ (Definición)
$\Leftrightarrow (p')' \wedge q'$ (De Morgan)
$\Leftrightarrow p \wedge q'$ (Doble Negación)

3) $p \rightarrow (q \wedge q') \;\Leftrightarrow\; p'$

$p \rightarrow (q \wedge q') \Leftrightarrow p \rightarrow F$ (Complemento)
$\Leftrightarrow p' \vee F$ (Definición)
$\Leftrightarrow p'$ (Identidad)

4) $(q \vee q') \rightarrow p \;\Leftrightarrow p$

$(q \vee q') \rightarrow p \Leftrightarrow (q \vee q')' \vee p$ (Definición)
$\Leftrightarrow V' \vee p$ (Complemento)
$\Leftrightarrow F \vee p$ (Complemento)
$\Leftrightarrow p$ (Identidad)

5) $(p \wedge q) \rightarrow r \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge q)' \vee r$ (Definición)
$\Leftrightarrow (p' \vee q') \vee r$ (De Morgan)
$\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee r)$ (Asociatividad)
$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Definición)

6) $p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (p \to r)$

$$
\begin{aligned}
p \to (q \to r) &\Leftrightarrow p' \lor (q' \lor r) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (p' \lor q') \lor r && \text{(Asociatividad)}\\
&\Leftrightarrow (q' \lor p') \lor r && \text{(Conmutatividad)}\\
&\Leftrightarrow q' \lor (p' \lor r) && \text{(Asociatividad)}\\
&\Leftrightarrow q \to (p \to r) && \text{(Definición)}
\end{aligned}
$$

7) $(p \to q) \leftrightarrow p \Leftrightarrow p \land q$

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow p &\Leftrightarrow ((p \to q) \to p) \land (p \to (p \to q)) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p \to q)' \lor p) \land (p' \lor (p \to q)) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \lor q)' \lor p) \land (p' \lor (p' \lor q)) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor p) \land (p' \lor (p' \lor q)) && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow p \land (p' \lor (p' \lor q)) && \text{(Absorción)}\\
&\Leftrightarrow p \land ((p' \lor p') \lor q) && \text{(Asociatividad)}\\
&\Leftrightarrow p \land (p' \lor q) && \text{(Idempotencia)}\\
&\Leftrightarrow (p \land p') \lor (p \land q) && \text{(Distributividad)}\\
&\Leftrightarrow F \lor (p \land q) && \text{(Complemento)}\\
&\Leftrightarrow p \land q && \text{(Identidad)}
\end{aligned}
$$

8) $(p \to q) \leftrightarrow q \Leftrightarrow p \lor q$

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow q &\Leftrightarrow ((p \to q) \to q) \land (q \to (p \to q)) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p \to q)' \lor q) \land (q' \lor (p \to q)) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \lor q)' \lor q) \land (q' \lor (p' \lor q)) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (((p')' \land q') \lor q) \land (q' \lor (p' \lor q)) && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor q) \land (q' \lor (p' \lor q)) && \text{(Doble Negación)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor q) \land (q' \lor (q \lor p')) && \text{(Conmutatividad)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor q) \land ((q' \lor q) \lor p') && \text{(Asociatividad)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor q) \land (V \lor p') && \text{(Complemento)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor q) \land V && \text{(Identidad)}\\
&\Leftrightarrow ((p \land q') \lor q) && \text{(Identidad)}\\
&\Leftrightarrow (p \lor q) \land (q' \lor q) && \text{(Distributividad)}\\
&\Leftrightarrow (p \lor q) \land V && \text{(Complemento)}\\
&\Leftrightarrow p \lor q && \text{(Identidad)}
\end{aligned}
$$

9) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p' \land q')$

$$
\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (p' \lor q) \land (q' \lor p) && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (p' \land (q' \lor p)) \lor (q \land (q' \lor p)) && \text{(Distributividad)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \land q') \lor (p' \land p)) \lor ((q \land q') \lor (q \land p)) && \text{(Distributividad)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \land q') \lor F) \lor (F \lor (q \land p)) && \text{(Complemento)}\\
&\Leftrightarrow (p' \land q') \lor (q \land p) && \text{(Identidad)}\\
&\Leftrightarrow (p \land q) \lor (p' \land q') && \text{(Conmutatividad)}
\end{aligned}
$$

10) $p' \leftrightarrow q' \;\Leftrightarrow\; p \leftrightarrow q$

$$
\begin{aligned}
p' \leftrightarrow q' &\Leftrightarrow (p' \rightarrow q') \wedge (q' \rightarrow p') && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow ((p')' \vee q') \wedge ((q')' \vee p') && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q') \wedge (q \vee p') && (\text{Doble Negación}) \\
&\Leftrightarrow (q' \vee p) \wedge (p' \vee q) && (\text{Conmutatividad}) \\
&\Leftrightarrow (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && (\text{Conmutatividad}) \\
&\Leftrightarrow p \leftrightarrow q && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

11) $(p \leftrightarrow q)' \;\Leftrightarrow\; p' \leftrightarrow q$

$$
\begin{aligned}
(p \leftrightarrow q)' &\Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))' && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow ((p' \vee q) \wedge (q' \vee p))' && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow (p' \vee q)' \vee (q' \vee p)' && (\text{De Morgan}) \\
&\Leftrightarrow ((p')' \wedge q') \vee ((q')' \wedge p') && (\text{De Morgan}) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q') \vee (q \wedge p') && (\text{Doble Negación}) \\
&\Leftrightarrow ((p \wedge q') \vee q) \wedge ((p \wedge q') \vee p') && (\text{Distributividad}) \\
&\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (q' \vee q)) \wedge ((p \vee p') \wedge (q' \vee p')) && (\text{Distributividad}) \\
&\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge V) \wedge (V \wedge (q' \vee p')) && (\text{Complemento}) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q' \vee p') && (\text{Identidad}) \\
&\Leftrightarrow ((p')' \vee q) \wedge (q' \vee p') && (\text{Doble Negación}) \\
&\Leftrightarrow (p' \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p') && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow p' \leftrightarrow q && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

12) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (q \wedge r)$

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\Leftrightarrow (p' \vee q) \wedge (p' \vee r) && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow p' \vee (q \wedge r) && (\text{Distributividad}) \\
&\Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r) && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

13) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (q \vee r)$

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\Leftrightarrow (p' \vee q) \vee (p' \vee r) && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow ((p' \vee q) \vee p') \vee r && (\text{Asociatividad}) \\
&\Leftrightarrow (p' \vee (q \vee p')) \vee r && (\text{Asociatividad}) \\
&\Leftrightarrow (p' \vee (p' \vee q)) \vee r && (\text{Conmutatividad}) \\
&\Leftrightarrow ((p' \vee p') \vee q) \vee r && (\text{Asociatividad}) \\
&\Leftrightarrow (p' \vee q) \vee r && (\text{Idempotencia}) \\
&\Leftrightarrow p' \vee (q \vee r) && (\text{Asociatividad}) \\
&\Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r) && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

14) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \rightarrow r$

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow (p' \vee r) \wedge (q' \vee r) && (\text{Definición}) \\
&\Leftrightarrow (p' \wedge q') \vee r && (\text{Distributividad}) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q)' \vee r && (\text{De Morgan}) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r && (\text{Definición})
\end{aligned}
$$

15) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	$\Leftrightarrow (p' \vee r) \vee (q' \vee r)$	(Definición)
	$\Leftrightarrow p' \vee (r \vee (q' \vee r))$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee ((r \vee q') \vee r)$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee ((q' \vee r) \vee r)$	(Conmutatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee (r \vee r))$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow p' \vee (q' \vee r)$	(Idempotencia)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q') \vee r$	(Asociatividad)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q)' \vee r$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$	(Definición)

16) $p \Rightarrow p \vee q$

Sea p Verdadero, entonces:

$p \vee q$	$\Leftrightarrow V \vee q$	($p \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow V$	(Identidad)

17) $p \Rightarrow q \rightarrow p$

Sea p Verdadero, entonces:

$q \rightarrow p$	$\Leftrightarrow q' \vee p$	(Definición)
	$\Leftrightarrow q' \vee V$	($p \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow V$	(Identidad)

18) $p' \Rightarrow p \rightarrow q$

Sea p' Verdadero, entonces:

$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow p' \vee q$	(Definición)
	$\Leftrightarrow V \vee q$	($p' \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow V$	(Identidad)

19) $(p \wedge p') \Rightarrow q$

Equivale a demostrar:

$q' \Rightarrow (p \wedge p')'$ (Contra recíproco)

Sea q' Verdadero, entonces:

$(p \wedge p')'$	$\Leftrightarrow F'$	(Complemento)
	$\Leftrightarrow V$	(Complemento)

20) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Equivale a demostrar:

$q' \Rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge p)'$ (Contra recíproco)

Sea q' Verdadero, entonces:

$((p \rightarrow q) \wedge p)'$	$\Leftrightarrow ((p' \vee q) \wedge p)'$	(Definición)
	$\Leftrightarrow (p' \vee q)' \vee p'$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow ((p')' \wedge q') \vee p'$	(De Morgan)
	$\Leftrightarrow (p \wedge q') \vee p'$	(Doble Negación)
	$\Leftrightarrow (p \wedge V) \vee p'$	($q' \Leftrightarrow V$)
	$\Leftrightarrow p \vee p'$	(Identidad)
	$\Leftrightarrow V$	(Complemento)

21) $(p \rightarrow q) \wedge q' \Rightarrow p'$

Equivale a demostrar:

$p \Rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge q')'$ (Contra recíproco)

Sea p Verdadero, entonces:

$$
\begin{aligned}
((p \rightarrow q) \wedge q')' &\Leftrightarrow ((p' \vee q) \wedge q')' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \wedge q') \vee (q \wedge q'))' && \text{(Distributividad)}\\
&\Leftrightarrow ((p' \wedge q') \vee F)' && \text{(Complemento)}\\
&\Leftrightarrow (p' \wedge q')' && \text{(Identidad)}\\
&\Leftrightarrow p \vee q && \text{(De Morgan y Doble Negación)}\\
&\Leftrightarrow V \vee q && (p \Leftrightarrow V)\\
&\Leftrightarrow V && \text{(Identidad)}
\end{aligned}
$$

22) $p' \Leftrightarrow p \uparrow p$

$$
\begin{aligned}
p \uparrow p &\Leftrightarrow (p \wedge p)' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow p' && \text{(Idempotencia)}
\end{aligned}
$$

23) $p' \Leftrightarrow p \downarrow p$

$$
\begin{aligned}
p \downarrow p &\Leftrightarrow (p \vee p)' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow p' && \text{(Idempotencia)}
\end{aligned}
$$

24) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

$$
\begin{aligned}
(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) &\Leftrightarrow ((p \wedge q)' \wedge (p \wedge q)')' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p \wedge q)')' && \text{(Idempotencia)}\\
&\Leftrightarrow p \wedge q && \text{(Doble Negación)}
\end{aligned}
$$

25) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$$
\begin{aligned}
(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) &\Leftrightarrow ((p \vee p)' \vee (q \vee q)')' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (p' \vee q')' && \text{(Idempotencia)}\\
&\Leftrightarrow p \wedge q && \text{(Definición)}
\end{aligned}
$$

26) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$$
\begin{aligned}
(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) &\Leftrightarrow ((p \vee q)' \vee (p \vee q)')' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow ((p \vee q)')' && \text{(Idempotencia)}\\
&\Leftrightarrow p \vee q && \text{(Doble Negación)}
\end{aligned}
$$

27) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

$$
\begin{aligned}
(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) &\Leftrightarrow ((p \wedge p)' \wedge (q \wedge q)')' && \text{(Definición)}\\
&\Leftrightarrow (p' \wedge q')' && \text{(Idempotencia)}\\
&\Leftrightarrow p \vee q && \text{(De Morgan y Doble Negación)}
\end{aligned}
$$