1. En el desarrollo $(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x})^9$. Hallar:

a) El quinto término.

b) El término que contiene a x^5.

SOLUCION:

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(\frac{3}{2}x^2)^{9-k}(-\frac{1}{3x})^k = \binom{9}{k}(\frac{3}{2})^{9-k}(-\frac{1}{3})^k x^{18-3k}, \qquad (1)$$

Por tanto:

a) El quinto término $\Rightarrow k+1=5 \Leftrightarrow k=4 \Rightarrow T_5 = \binom{9}{4}(\frac{3}{2})^5(-\frac{1}{3})^4 x^6$

b) En (1), se debe tener que $18-3k=5 \Leftrightarrow k=\frac{13}{3}$ lo que nos indica que no existe tal término pués k no puede ser fraccionario.

7. Encuentre el término central de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$

Solución.

Notemos que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ tiene 13 términos, luego el término central resulta el séptimo es decir para $k=6$ en

$T_{k+1} = \binom{12}{k}x^{n-k}(\frac{1}{x})^k = \binom{12}{k}x^{12-2k}$ por tanto $T_7 = \binom{12}{6}$

1.- En el desarrollo de $\left(3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, determinar:

i) El cuarto término.

ii) El coeficiente de x^{10}.

SOLUCION:

i) $\left(3x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20} = \displaystyle\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3x^2)^{20-k}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$

Se tiene, $T_{k+1}=\dbinom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$ representa un término cualquiera del desarrollo. Luego, el cuarto término, T_4 se obtiene para $k=3$. Luego $T_4=\dbinom{20}{3}3^{17}\cdot 2^3\cdot x^{\frac{65}{2}}$.

ii) El coeficiente de x^{10} es $\dbinom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k$ para un valor de k, tal que $40-\frac{5}{2}k=10 \Rightarrow k=12$.

$\therefore$ El coeficiente de x^{10} es $\dbinom{20}{12}3^8\cdot 2^{12}$.

2.- Determinar el valor de n para que los quintos términos de $\left(a+\dfrac{1}{a^3}\right)^{4n}$ y $\left(a^2+\dfrac{1}{a^4}\right)^{4n}$ sean iguales.

Solución:

$$\left(a+\frac{1}{a^3}\right)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{4n-k}\cdot\left(a^{-3}\right)^k = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{4n-4k}$$

$$\left(a^2+\frac{1}{a^4}\right)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot\left(a^2\right)^{4n-k}\cdot\left(a^{-4}\right)^k = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{8n-6k}$$

El quinto término de $\left(a+\dfrac{1}{a^3}\right)^{4n}$ es $\dbinom{4n}{4}\cdot a^{4n-16}$

El quinto término de $\left(a^2+\dfrac{1}{a^4}\right)^{4n}$ es $\dbinom{4n}{4}\cdot a^{8n-24}$

Luego $\dbinom{4n}{4}\cdot a^{4n-16}=\dbinom{4n}{4}\cdot a^{8n-24} \Leftrightarrow a^{4n-16}=a^{8n-24} \Rightarrow n=2$.