GUÍA EJERCICIOS: NÚMEROS NATURALES

PROGRESIONES ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

EJERCICIOS CON RESPUESTAS

1.- Verifique si las siguientes progresiones son Aritméticas, y calcule la diferencia en caso de que lo sea.

a) 3,5,7,9,11..... **Sol.:** SI d=2
b) 2,4,8,16.... **Sol.:** NO
c) 1,6,11,16,21..... **Sol.:** SI d=5
d) 2,4,6,8,10,12..... **Sol.:** SI d=2
e) 3,6,9,12,15,18.... **Sol.:** SI d=2

2.- Encontrar la P.A. sabiendo que :

a) $a_1 = 2$ $d = 1 / 2$ **Sol.:** P.A. : 2, 5/2,3,7/2,4,....
b) $a_1 = -1$ $d = 2$ **Sol.:** P.A. : -1,1,3,5,...
c) $a_1 = 5$ $a_2 = 10$ **Sol.:** P.A. : 5,10,15,20,25,…
d) $a_1 = -2$ $a_3 = 0$ **Sol.:** P.A. : -2,-1,0,1,2,3,...

3.- Hallar el

a) 11º término de la P.A. 6, 9, 12, ... **Sol.:** 54
b) 9º término de la P.A. 2, 9 , 16 ,... **Sol.:** 58
c) 7º término de la P.A. 18,12,6,.... **Sol.:** -18
d) 8º término de la P.A. 7,1,-5,.... **Sol.:** -35

4.- Determine la suma de los :

a) Primeros 6 términos de la P.A. 4,6,8,... **Sol.:** 54
b) Primeros 8 términos de la P.A. –7,-5,-3,... **Sol**.: 0
c) Primeros 7 términos de la P.A. –8,-4,0, ... **Sol.:** 28
d) Primeros 4 términos de la P.A. 2,5,8,... **Sol.:** 26

5.- Los tres ángulos de un triangulo están en P.A. de diferencia 30º. Encuéntrelos. **Sol.:** 30º,60º,90º

6.- Hallar los cuatro lados de un cuadrilátero, sabiendo que están en P.A. de diferencia 12mt y que su perímetro es 168mt. **Sol.:** 24,36,48,60

7.- La suma de tres términos consecutivos de una P.A. es 18 y la suma de sus cuadrados es 116. Determine cuáles son los números. **Sol.:** 4,6,8,

8.- La suma de cuatro términos consecutivos de una P.A. es 28 y la suma de sus cuadrados es 276. ¿Cuáles son los números? **Sol.:** 1,5,9,13

9.- El quinto término de una P.A. es 10 y el noveno es 18. Hallar el octavo término. **Sol.:** 16

10.- Una persona viaja 40 km el primer día y en cada día posterior 5 km menos de lo que recorrió el día anterior. ¿Cuánto habrá recorrido al cabo de 5 días? **Sol.:** 150km.

11.- Carlos compró 8 libros. Por el primero pagó $ 8 y por cada uno de los demás $ 2 más que el anterior Hallar el importe de la compra. **Sol.:** $ 120

12.- Verifique si las siguientes progresiones son Geométricas, y calcule la razón en caso de que lo sea.

a)	3,6,12,24.....	**Sol.:** SI r = 2
b)	1,5,25,125,...	**Sol.:** SI r= 5
c)	2,6,18,25,....	**Sol.:** NO
d)	1,2,4,8,....	**Sol.:** SI r = 2
e)	1,2,3,4,5,-7,-8,...	**Sol.:** NO

13.- Encontrar la P.G. sabiendo que :

a)	$a_1 = 4$	r = 1 / 2	**Sol.:** P.G. : 4,2,1,1/2
b)	$a_1 = -2$	r = 2	**Sol.:** P.G. : 3,9,27,81
c)	$a_2 = 9$	r = 3	**Sol.:** P.G. : 7,7/3,7/9,7/27
d)	$a_1 = 7$	r = 1 / 3	

14.- Hallar el

a)	4º término de la P.G. 2,4,8,…	**Sol.:** 16
b)	5º término de la P.G. –3 ,9 –27,...	**Sol.:** -243
c)	6º término de la P.G. –4 ,-16, -64,...	**Sol.:** -4096
d)	8º término de la P.G 5,-15,45,...	**Sol.:** -10395

15.- Hallar la suma de

a)	los 5 primeros términos de la P.G. 2,4,8,...	**Sol.**: 62
b)	Los 6 primeros términos de la P.G. –3,9,-27,...	**Sol.:** 546
c)	Los 4 primeros términos de la P.G. 5,20,80,..	**Sol.:** 425
d)	Los 7 primero términos de la P.G. –4,20,-100,....	**Sol.:** -52084

16.- Hallar el producto de los 4 primeros términos de la P.G. 2, 4 ,8,... **Sol.:** 1024

17.- La razón de una P.G. es 3 y el quinto término es 324. Hallar el primer término. **Sol.: 4**

18.- El sexto término de una P.G. es 96 y la razón es 2 . Hallar el primer término. **Sol.:** 3

19.- El quinto término de una P.G. es 512 y el primer término es 2 . Hallar la razón. **Sol.:** 4

20.- La suma de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es 52 y su producto es 1728. Hallar los números. **Sol.:** 4,12,36

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1.- Determine:

a) a_{11} y S_{11} en la P.A. 2, 6, 10, ...

b) a_9 y S_7 en la P.A. –3, -1, 1, ...

c) a_{24} y S_{15} en la P.A. $3, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, ...$

2.- El cuarto término de un P.A. es 21 y el décimo es 48. Calcule la diferencia y el tercer término.

3.- La suma de tres números de una P.A. es 21 y el producto del primero por el tercero es 33 ¿Cuáles son los números?

4.- ¿Cuántos términos de P.A. 6, 10, 14, ... deben considerarse para que sumen 1920?

5.- Determine tres números de una P.A. tales que su suma sea 27 y su producto 288

6.- Determine k de modo que 8k + 4, 6k – 2, 2k – 7 estén en P.A.

7.- Determine:

a) a_6 y S_7 en la P.G. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots\ldots$

b) a_{10} y S_{10} en la P.G. 2, 4, 6,....

c) a_5 y S_6 en la P.G. $2, \frac{-2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots.$

8.- En una P.G. dados r = 2 y S_7 = 635, Calcule a_1 y a_7

9.- El tercer término de una P.G. es 3 y el séptimo término es $\frac{3}{16}$, calcule la razón y el primer término de dicha P.G.

10.- Calcule la suma de los 2n primeros términos de la P.G. $3, -4, \frac{16}{3} \ldots..$

11.- Una persona arrienda una pieza en una pensión durante el año 1989. Acuerda con la dueña reajustar la renta mes a mes en una cantidad fija. El arrendatario calcula que deberá pagar \$105.840 anuales y que en el mes de diciembre deberá cancelar \$13.440.

a) ¿Cuál fue la renta de Enero?
b) ¿Cuál es el monto del reajuste acordado?

12.-Un individuo conviene en pagar una deuda de \$36.000 en 40 pagos parciales anuales que forman una P.A. Cuando 30 de los pagos están cubiertos, el duedor fallece dejando una tercera parte de la deuda sin cancelar. Calcule el valor del primer pago.

13.-A un empleado una empresa A le ofrece una renta de \$120.000 anuales con un aumento de \$3.000 anuales, por un periodo de 15 años. Otra empresa B, por el mismo periodo de tiempo, le ofrece \$140.000 y anuales un aumento de \$2.000 por año ¿Cuál ofrecimiento es más conveniente para el empleado?

14.- Un cuerpo al caer recorre 4 metros en el primer segundo. Si en cada segundo la distancia recorrida aumenta en 1,6 veces, de que altura cae este cuerpo se demoró 10 segundos en tocar el suelo

15.-Una pelota de hule cae de una altura de 20 metros y rebota ascendiendo cada vez hasta una cuarta parte del ascenso anterior. Calcular la distancia total recorrida por la pelota cuando pega en el suelo por sexta vez.

SUMATORIA

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular: $\sum_{k=1}^{50}(3k^2+2k-5)$

Sol.:

$$\sum_{k=1}^{50}(3k^2+2k-5)=3\sum_{k=1}^{50}k^2+2\sum_{k=1}^{50}k-\sum_{k=1}^{50}5=3\cdot\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}+2\cdot\frac{50\cdot 51}{2}-5\cdot 50=131.075$$

2.- Calcular $\sum_{k=10}^{40}\left[(k+1)^3+3(k-5)^2-3^{5-k}\right]$

Sol.:

$$\sum_{k=10}^{40}\left[(k+1)^3+3(k-5)^2-3^{5-k}\right]=\sum_{k=10}^{40}(k+1)+\sum_{k=10}^{40}(k-5)^2-\sum_{k=10}^{40}3^{5-k}$$

$$=\sum_{k=11}^{40}k^3+3\sum_{k=5}^{35}k^2-\sum_{k=10}^{40}3^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=\sum_{k=1}^{41}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^3+3\left(\sum_{k=1}^{35}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2\right)+3^5\left(\sum_{k=1}^{40}\left(\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

$$=\frac{41^2\cdot 42^2}{4}-\frac{10^2\cdot 11^2}{4}+3\cdot\left(\frac{35\cdot 36\cdot 71}{6}-\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6}\right)+3^5\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{40}-1}{3\left(\frac{1}{3}-1\right)}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{9}-1}{3\left(\frac{1}{3}-1\right)}\right)$$

3.- Calcular $\sum_{i=1}^{15}\left(\sum_{j=1}^{10}(i^2\cdot j+2^i\cdot 2^{3j})\right)$

Sol.:

$$\sum_{i=1}^{15}\left(\sum_{j=1}^{10}(i^2\cdot j+2^{i+3j})\right)=\sum_{i=1}^{15}\left(\sum_{j=1}^{10}(i^2\cdot j+2^i\cdot 2^{3j})\right)=\sum_{i=1}^{15}\left(i^2\sum_{j=1}^{10}j+2^i\sum_{j=1}^{10}8^j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{15}\left(i^2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+2^i\cdot 8\cdot\frac{8^{10}-1}{8-1}\right)=\frac{10\cdot 11}{2}\cdot\frac{15\cdot 16\cdot 31}{6}+8\cdot\frac{8^{10}-1}{8-1}\cdot 2\cdot\frac{2^{15}-1}{2-1}$$

4.- Calcular el valor de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ si se sabe que $\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{20}(n\cdot k)=500$.

Sol.:

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{20}(n\cdot k)=500 \Leftrightarrow \frac{1}{21}\cdot n\sum_{i=1}^{20}k \Leftrightarrow \frac{1}{21}\cdot n\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=500 \Rightarrow n=50$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{50}k^3=\frac{50^2\cdot 51^2}{4}$$

5.- Calcular $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$ en función de *n*.

Sol.:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)\cdot k!-k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)!-k!\right]=(n+1)!-1$$

(TELESCÓPICA)

6.- Calcular $\sum_{k=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)$

Sol:

$$\sum_{k=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=\sum_{k=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\right)$$

$$=\sum_{K=1}^{80}\left[\frac{\sqrt{K+1}-\sqrt{K}}{\left(\sqrt{K+1}\right)^2-\left(\sqrt{K}\right)^2}\right]=\sum_{K=1}^{80}\left(\frac{\sqrt{K+1}-\sqrt{K}}{K+1-K}\right)$$

$$=\sum_{K=1}^{80}\left(\sqrt{K+1}-\sqrt{K}\right)=\sqrt{80+1}-\sqrt{1}=8$$ (TELESCOPICA)

7.- Calcular $\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2+1\right)k!\right]$ en función de

Sol :

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2+1\right)k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2-1+2\right)k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2-1\right)k!+2k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)(k+1)!+2k!\right]=\%$$

$$\%=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-(k+1)!+2k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-k!(k+1)+2k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-k!(k+1-2)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-k!(k-1)\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-(k-1)k!\right]=n(n+1)!-(1-1)1!=n(n+1)!$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1. Calcular $\sum_{k=15}^{40}\left[(k-14)^3+3\cdot 2^{5-k}+2(k-5)^2\right]$

2. Calcular $\sum_{i=1}^{n}\left[2^{-2i}+(i+2)^3-n\right]$ en función de n

3. Calcular $\sum_{k=0}^{n}\left[k\sum_{i=0}^{k}2^i\right]$ en función de n

4. Calcular $\sum_{k=1}^{n}k$ en función de n (indicación : considerar la identidad $(k+1)^2-k^2=2k+1$ y aplicar telescópica).

5. Calcular $\sum_{k=1}^{n}(ka^k)$ en función de n y a (a $\neq$ 1)

6. Calcular $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$

7. Calcular $\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}$ en función de n

TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- En el desarrollo de $\left(3x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, determinar:

i) El cuarto término.

ii) El coeficiente de x^{10}.

iii) El término independiente de *x*.

Solución:

i) $\left(3x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3x^2)^{20-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$

Se tiene, $T_{k+1}=\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$ representa un término cualquiera del desarrollo. Luego, el cuarto término, T_4 se obtiene para k = 3. Luego $T_4=\binom{20}{3}3^{17}\cdot 2^3\cdot x^{\frac{65}{2}}$.

ii) El coeficiente de x^{10} es $\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k$ para un valor de k, tal que $40-\frac{5}{2}k=10\Rightarrow k=12$.

$\therefore$ El coeficiente de x^{10} es $\binom{20}{12}3^8\cdot 2^{12}$.

iii) El término independiente de x es $\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k$ para un valor de k tal que $40-\frac{5}{2}k=0\Rightarrow k=16$. $\therefore$ El término independiente de x es $\binom{20}{16}3^4\cdot 2^{16}$.

a) En el desarrollo de $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$, encontrar el término independiente de *x*, si se sabe que el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades.

Solución:

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{3/2})^{n-k}\cdot(x^{-4})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{\frac{3}{2}n-\frac{11}{2}k}$$

Coeficiente tercer término: $\binom{n}{2}$; Coeficiente seg.término: $\binom{n}{1}$

$$\Rightarrow \binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 44 \Leftrightarrow \frac{n^2 - n}{2} = n + 44 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Rightarrow n = 11 \vee n = -8$$

Como $n \in IN \Rightarrow n = 11$. Luego $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n = \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=o}^{11} \binom{11}{k} \cdot x^{\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k}$

El término independiente de *x* es $\binom{11}{k}$ donde k es tal que $\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Finalmente el término independiente de *x* es $\frac{11!}{3! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8!} = 165$.

2.- Determinar el valor de *n* para que los quintos términos de $\left(a + \frac{1}{a^3}\right)^{4n}$ y $\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)^{4n}$ sean iguales.

Solución:

$$\left(a + \frac{1}{a^3}\right)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \cdot a^{4n-k} \cdot \left(a^{-3}\right)^k = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \cdot a^{4n-4k}$$

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \cdot \left(a^2\right)^{4n-k} \cdot \left(a^{-4}\right)^k = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \cdot a^{8n-6k}$$

El quinto término de $\left(a + \frac{1}{a^3}\right)^{4n}$ es $\binom{4n}{4} \cdot a^{4n-16}$

El quinto término de $\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)^{4n}$ es $\binom{4n}{4} \cdot a^{8n-24}$

Luego $\binom{4n}{4} \cdot a^{4n-16} = \binom{4n}{4} \cdot a^{8n-24} \Leftrightarrow a^{4n-16} = a^{8n-24} \Rightarrow n = 2$.

3.- Demostrar que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad n \in IN$

Solución:

Teorema de Binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot a^k$. Si $a = b = 1$:

$$\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \therefore 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$. QED.

4.- En el desarrollo de $\left(ax+\frac{1}{bx^2}\right)^n$, determinar la condición que debe cumplir *n* para que exista el término independiente de *x*.

Solución:

$$\left(ax+\frac{1}{bx^2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(ax)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{bx^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^{-k}\cdot x^{n-3k}$$

El término independiente de *x* se obtiene para aquel valor de *k* tal que $n-3k=0 \Leftrightarrow k=\frac{n}{3}$.

Como $k=1,2,3,.........$, la condición sobre *n* es que *n* debe ser múltiplo de 3.

5.- Determinar el coeficiente de x^{19} en el desarrollo de $(1+2x)\cdot(1-x^3)^9$

Solución:

$$(1+2x)(1-x^3)^9 = (1+2x)\sum_{k=0}^{9}(9_k)\cdot 1^{9-k}(-x^3)^k = (1+2x)\sum_{k=0}^{9}(9_k)(-1)^k x^{3k}$$

$$= \sum_{k=0}^{9}(9_k)(-1)^k x^{3k} + \sum_{k=0}^{9}2\binom{9}{k}(-1)^k x^{3k+1}$$

------------------------- -------------------------

$$3k=19 \Leftrightarrow k=\frac{19}{3}\notin IN \qquad 3k+1=19 \Leftrightarrow k=6$$

Luego, el coeficiente de x^{19} es $2\binom{9}{6}(-1)^6=168$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Verifique si se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-2}=\binom{n+2}{k}$

b) $\binom{n+3}{k}-3\binom{n+2}{k}+3\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k-3}$

2.- En cada caso, encuentre el valor de n que satisface la condición dada.

a) $\binom{n}{2}=55$ b) $\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

c) $2\binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$

d) $\dfrac{\binom{n}{5} - \binom{n}{4}}{\binom{n}{5} + \binom{n}{4}} = \dfrac{1}{2}$

3.- Desarrolle:

a) $(a - b)^7$

b) $(2x + y^2)^3$

c) $\left(5x - y^{1/2}\right)^5$

d) $\left(x^{-1} + 2y^{-1}\right)^6$

4.- Determine:

a) El cuarto término de: $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^6$

b) El término central de: $\left(\dfrac{3}{a} + a\right)^6$

c) Los términos centrales de: $\left(6x^2 - \dfrac{1}{3x^3}\right)^{15}$

d) El término central en: $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$

5.- Determine el término independiente de x en el desarrollo de:

a) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^9$ b) $\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$ c) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$

6.- Determine:

a) El coeficiente de x^{18} en el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{3a}{x}\right)^{15}$

b) El coeficiente de x^{30} en el desarrollo de $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$

c) El coeficiente de x^{38} en el desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{25}$

d) El coeficiente de x^{17} en el desarrollo de $\left(5x^2 + \dfrac{1}{3x}\right)^{34}$

e) El coeficiente del término que está en la posición 28 en el desarrollo de :

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{52}$$