Guía de Trabajo

Funciones y Procesos Infinitos

Sumatorias:

1. Concepto de sumatoria:

A menudo resulta difícil trabajar con todos los elementos de una determinada sucesión, considerándolos como sumandos.

Para facilitar este trabajo se ha convenido representar la adición de los términos en forma abreviada, mediante el signo Σ, acompañado de la fórmula o término general que define a la sucesión y del rango de valores que tomará la variable considerada en esa fórmula.

> El signo Σ corresponde a la letra mayúscula sigma, del alfabeto griego. Es equivalente a la letra S, de nuestro alfabeto.

Se denomina sumatoria de una sucesión a_n, a la forma abreviada de escribir sus términos expresados como sumandos:

Se denota:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ejemplos:

1+2+3+...+ n= $\sum_{k=1}^{n} k$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{20}{21} = \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{k+1}$$

2. Propiedades de las sumatorias:

Sumatoria de una constante:

Si $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_n = c$, constante, entonces: $\sum_{k=1}^{n} c_k = n \cdot c$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{50} 4 = 4 + 4 \underbrace{+ 4 + \ldots + 4}_{} = 50 \cdot 4 = 200$$

50 veces

Sumatoria del producto de una constante por los términos de una sucesión:

Si c es una constante, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La notación $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se lee: "sumatoria de los términos de la forma, a sub k, donde k varía de 1 a n."

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{5} 3(k^2+1) = 3 \cdot \sum_{k=1}^{5} (k^2+1) = 3 \cdot (2+5+10+17+26) = 3 \cdot 60 = 180$$

Sumatoria de una suma o resta de términos de dos o más sucesiones:

Si a_k y b_k son sucesiones, entonces se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Ejemplo: $\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 - 3 \cdot \sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} 2$

Propiedad Telescópica de las sucesiones:

El desarrollo de algunas sumatorias tiene la particularidad de que casi todos sus términos se anulan quedando estas reducidas a sólo dos términos. Esta propiedad se denomina Propiedad telescópica de las sumatorias. Observemos el siguiente caso:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_x) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

Luego:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

Con el mismo razonamiento se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

La Propiedad Telescópica también es válida para la suma de los recíprocos:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

La propiedad Telescópica es de gran utilidad para hallar una expresión que permita calcular directamente el valor de alguna sumatoria o para demostrar si una sumatoria es igual a una expresión o fórmula dada, como por ejemplo:

Calculemos una fórmula para:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

Si expresamos el numerador de la fracción como: (1+k-k), tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+k-k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+k}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Aplicando la propiedad telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}}$$

Guía de Ejercicios:

Funciones y Procesos Infinitos

Calcula las siguientes sumatorias:

1) $\sum_{k=1}^{7} \frac{k(k+1)}{2} =$

2) $\sum_{k=1}^{8} (3k-2) =$

3) $\sum_{k=1}^{6} \frac{k}{(k+1)^2} =$

4) $\sum_{k=1}^{10} \frac{k-1}{k+1} =$

5) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k}{2^k+1} =$

6) $\sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)^k (k^2+1)}{4k} =$

Expresa como sumatoria, las siguientes sumas:

i) $1^2 + 2^3 + 3^4 + \ldots + 50^{51}$

ii) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + 10 \cdot 19$

iii) $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 44$

iv) $1 + 4 + 7 + \ldots + 43$

v) $2 + 5 + 10 + 17 + \ldots + 401$

vi) $5 + 8 + 13 + 20 + \ldots + 904$

Aplica las propiedades de las sumatorias y calcula:

i) $\sum_{k=4}^{25} \frac{4}{22} =$

ii) $\sum_{k=1}^{10} \frac{7(k^3+1)}{5} =$

iii) $\sum_{k=11}^{20} (k^2+2)(k-2) =$

iv) $\sum_{k=1}^{13} (7+k)^3 =$

Guía de ejercicios N°2

Funciones y Procesos Infinitos

Usa la fórmula correspondiente y calcula cada una de las siguientes sumatorias:

1) $\sum_{k=1}^{40} k =$

2) $\sum_{k=1}^{30} (2k-1) =$

3) $\sum_{k=1}^{63} k^2 =$

4) $\sum_{k=1}^{80} (2k)^2 =$

5) $\sum_{k=1}^{70} (k^2 + k) =$

6) $\sum_{k=1}^{15} (5-2k)^2 =$

Usa las fórmulas conocidas y encuentra a su vez otra fórmula para cada una de las siguientes sumatorias.

i) $\sum_{k=1}^{n} 2k =$

ii) $\sum_{k=1}^{n} (3k-2) =$

iii) $\sum_{k=1}^{n} (2k+4) =$

iv) $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 1) =$

v) $\sum_{k=1}^{n}(6k^2 + 4k) =$

vi) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 =$

Guía de Trabajo Nº 3

Funciones y Procesos Infinitos

Sumatorias:

Sumatoria de una Sucesión:

A veces es posible encontrar una fórmula o expresión general para la sumatoria de los términos de una sucesión, lo que simplifica notablemente el cálculo de dicha sumatoria.

1) Sumatoria de los n primeros números naturales:

Sea A_n = 1, 2, 3, 4, 5, … , n-1, n

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n$$, o bien

$$\sum_{k=1}^{n} k = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+.3+2+1$$

Sumando término a término, tenemos:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{\text{n veces}}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1) \qquad ,luego \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Sumatoria de los n primeros números impares:

Sea A_n= 1, 3, 5, 7, … , (2n-1)

1+3+5+ … + (2n-1)= $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

Aplicando propiedades de la sumatoria, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

¡Compruébalo!