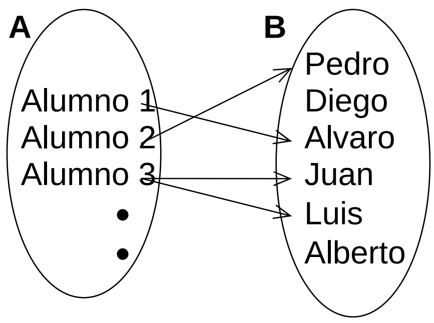
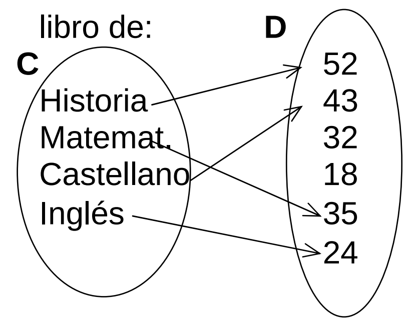
FUNCIONES REALES

INTRODUCCION :

El concepto de correspondencia o relación se usa frecuentemente en la vida diaria, por ejemplo:

a) A cada Alumno le corresponde su nombre.
b) A cada libro le corresponde su nº de páginas

a)


b)


c) A cada circunferencia le corresponde su área. $A = \pi \cdot r^2$
d) A cada alumno le corresponden 2 padres.
e) La relación entre el área, la base y la altura de un triángulo es $A = ½\ b \cdot h$

En este último caso hablamos que el **Area** depende de la **base** y de la **altura**, porque si cambian cualquiera de las variables, cambia el **área.**

$$A = f(b, h)$$

En el caso del área de la circunferencia, decimos que el área es función del radio (depende del radio).

f) De igual forma, la presión en el fondo de un recipiente es función de la profundidad del líquido (depende de la profundidad).

g) La temperatura de un determinado día en Santiago, está dada por la tabla:

hora	00	01	02	03	....	....	...	08	09	10	....
tº	14	13	12.5	12.1				11	12	14	....

En la tabla de valores vemos que la temperatura es una función de la hora (o sea la temperatura depende de la hora).

Indudablemente que hay relaciones que se pueden expresar claramente en forma algebraica, en cambio la relación **tº = f(hora)** no sería posible (con los conocimientos matemáticos que se poseen hasta este momento) expresarla en forma algebraica, o faltarían antecedentes o variables que nos permitieran expresarla algebraicamente.

El concepto de **función**, uso de relaciones y expresiones matemáticas, es muy útil en el planteo y solución de diferentes problemas de todo orden: lógicos, físicos, geométricos, balísticos, financieros, etc.

p. ej: Si se conoce la relación entre el alcance de un proyectil, ángulo de tiro, se puede calcular el ángulo para obtener el máximo alcance.

Si conocemos la relación entre un capital, su utilidad y el número de días que ha estado invertido, se podría calcular el número de días que hay que invertir ese capital para obtener una máxima utilidad.

Al conocer la relación entre el número de alumnos, el costo y otros parámetros, podríamos calcular el máximo numero de alumnos que se pueden aceptar por curso, para que el costo sea mínimo.

RELACIÓN BINARIA

Definición:

S es una relación binaria si y sólo si existen conjuntos A y B tales que

$$S \subseteq A \times B$$

En este caso también se dice que S es una relación de A en B

$$x\,S\,y \;\rightarrow\; (x, y) \in S$$

$S_1 = \{(1, -3), (-2, 5), (\sqrt{2}, -\sqrt{3})\}$ es una relación binaria donde $S_1 \subseteq \Re \times \Re$
$S_2 = \{x, y) \in \Re \times \Re \,/\, x + y = 1\}$ es una relación binaria y en este caso $(1, 0) \in S_2$

IMAGEN - PREIMAGEN
Definición:

Sean $A \wedge B$ conjuntos y $S \subseteq A \times B$ Si $(x, y) \in S$ se dice que "y" es **IMAGEN** de "x" por S y "x" es **PREIMAGEN** de "y" por S

DOMINIO Y RECORRIDO (RANGO)
Definición:

Sean $A \wedge B$ conjuntos y $S \subseteq A \times B$, se define

1.- $\text{Dom } S = \{ x \in A \,/\, \exists y \in B\ ((x, y) \in S)\}$
2.- $\text{Rec } S = \{ y \in B \,/\, \exists x \in A\ ((x, y) \in S)\}$

Ejemplo:

$$S = \{(x, y) \in \Re x \Re \,/\, x > 2 \wedge x + y = 1\}$$

$$\begin{aligned}\text{Dom } S &= \{x \in \Re \,/\, \exists y \in \Re \,/\, x > 2 \wedge x + y = 1\}\\ &= \{x \in \Re \,/\, x > 2 \wedge \exists y \in \Re \,/\, y = 1 - x\}\\ &= \{x \in \Re \,/\, x > 2\} =]\, 2, \infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Rec } S &= \{ y \in \Re \,/\, \exists x \in \Re \,/\, x > 2 \wedge x + y = 1\}\\ &= \{ y \in \Re \,/\, \exists x \in \Re \,/\, x > 2 \wedge x = 1 - y\}\\ &= \{ y \in \Re \,/\, 1 - y > 2\} = \{ y \in \Re \,/\, y < -1\} =]- \infty, -1[\end{aligned}$$

RELACIÓN INVERSA.
Definición:

Si S es una relación de A en B, entonces la relación de B en A está definida por:

$$S^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \,/\, (x, y) \in S\}$$

Ejemplo:

Si $S = \{(x, y) \in \Re \times \Re \,/\, x > 2 \wedge x + y = 1\}$
$S^{-1} = \{(y, x) \in \Re \times \Re \,/\, x > 2 \wedge x + y = 1\}$

CONJUNTO IMAGEN DE UN SUBCONJUNTO DEL DOMINIO
Definición:

Sean A $\wedge$ B dos conjuntos y $S \subseteq A \times B$ y $A_1 \subseteq$ Dom S

$$S^*(A_1) = \{y \in \text{Rec } S \,/\, \exists x \in A_1 \,((x, y) \in S)\}$$

Conjunto imagen de A_1 por S

Si $B_1 \subseteq$ Rec S, llamamos conjunto preimagen de B_1 por S al conjunto $S^{-1}(B_1)$

<u>CONCEPTO DE FUNCION</u> :

Una relación o correspondencia de un conjunto **A** en un conjunto **B** es una **función**, si a cada elemento de **x** $\in$ **A** le corresponde un único elemento **y** $\in$ **B**.- En este caso se acostumbra a decir que **“y” es una función de “x”**

Podríamos decir también que**:**

Función es aquella relación en que no hay dos pares ordenados diferentes que tengan igual el primer término**.**

Definición:

1.- F es una función si y sólo si F es una relación y

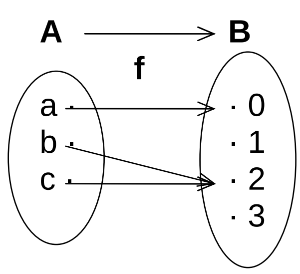
$$\forall x \in \text{Dom } F \; \exists! y \in \text{Rec } F \,((x, y) \in F\}$$

2.- Si A $\wedge$ B son conjuntos, entonces F es una función de A en B si y sólo si F es una función tal que Dom F = A $\wedge$ Rec F $\subseteq$ B

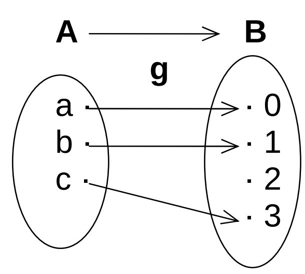
Se usa la notación $F: A \rightarrow B$ cuando B es función de A en B

la única imagen de x por F se denota como   **y = F(x)**

Ejemplo: Si **A = { a, b, c }** y **B = { 0, 1, 2, 3 }**, los siguientes diagramas sagitales muestran funciones de **A** en **B**

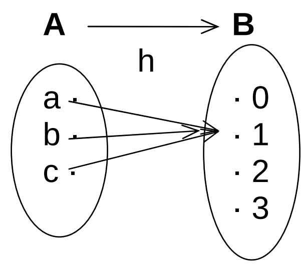


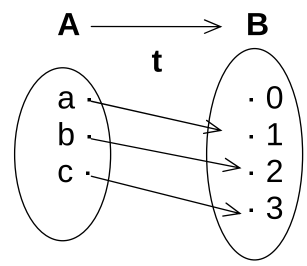
f(a) = 0
f(b) = 2
f(c) = 2



f(a) = 0
f(b) = 1
f(c) = 3

Donde f(a) = 0 significa que la imagen de "a" por " f " es 0





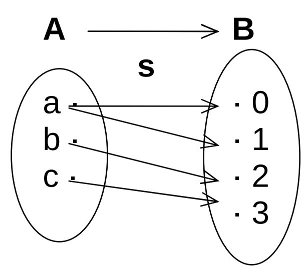
h(a) = 1
h(b) = 1
h(c) = 1

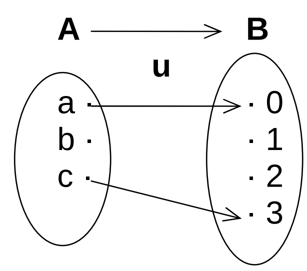
f(a) = 1
f(b) = 2
f(c) = 3

1 es la imagen de b

1 es la imagen de a
3 es la imagen de c

No son funciones los siguientes casos:



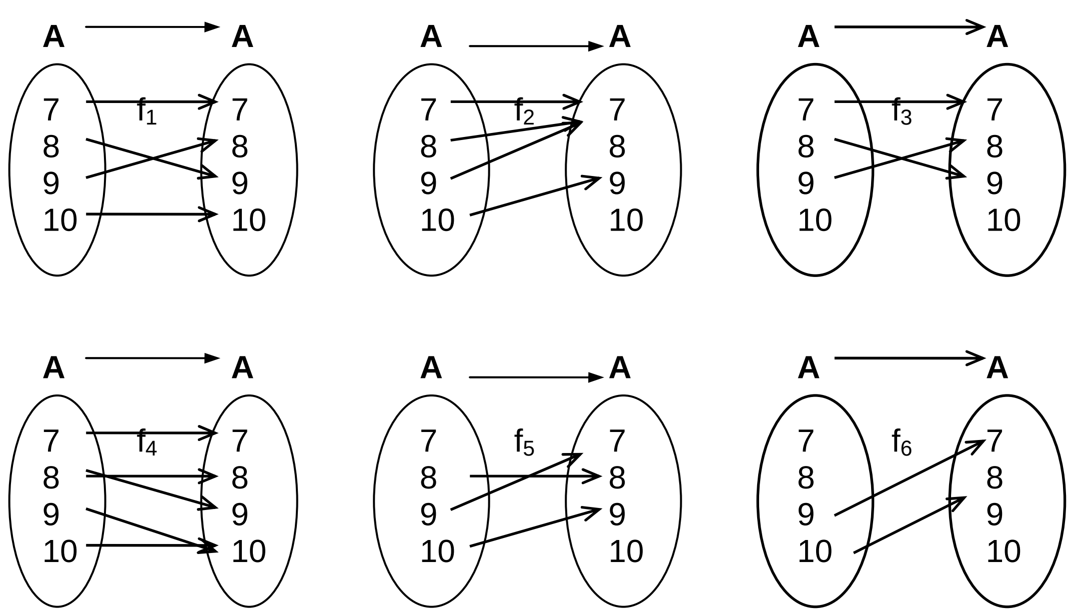


a tiene dos imágenes

b no tiene imagen

En una función de A en B, cada elemento de A tiene una y sólo una imagen en B.

Ejercicio: Si A = $\{ n \in \mathbf{N} \ / \ 7 \leq n \leq 10\}$
Los siguientes diagramas muestran relaciones en A.
Determinar cuáles son funciones.



Respuesta:
Sólo f_1 y f_2 son funciones ya que en f_3, el 10 no tiene imagen, en f_4 el 8 tiene dos imágenes, en f_5 el 7 no tiene imágenes y en f_6 el 7 y el 8 no tienen imágenes.

Ejemplo:

1.- S = {(x, y) $\in \Re \times \Re$ / x = y^2 }

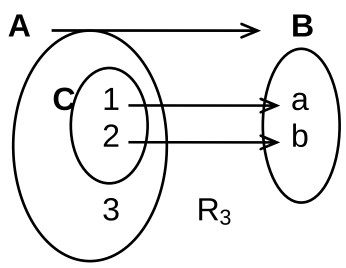
no es una función porque (1, 1) $\in$ S $\wedge$ (1, -1) $\in$ S y 1 $\neq$ -1
En otras palabras, el uno, del Dominio, tiene dos imágenes y de igual forma sucede con todos los elementos del Dominio.

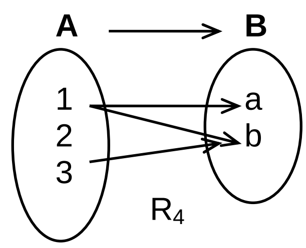
2.- f = {(x, y) $\in \Re$ x R / y = x^2 } es una función de $\Re$ en $\Re$
Dom f = $\Re$ y Rec f = $\Re$

<u>FUNCIONES CON DOMINIO RESTRINGIDO</u>:

Si definimos un dominio como un subconjunto de A, podríamos tener una función con **dominio de definición** o **dominio restringido**.

Sean las situaciones dadas:

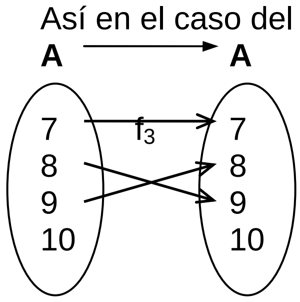




R_3 No es función de A en B porque 3 No tiene imagen, pero sí el dominio es **C**.
R_3 Si es función de C en B.
En este caso el dominio de la función se llama **Dominio de Definición** o **Dominio Restringido**.

Sin embargo R_4 ,No es función de A en B, porque 1 tiene dos imágenes y además 2 no tiene imagen.
Aunque se definiera un dominio restringido, 1 tiene dos imágenes.

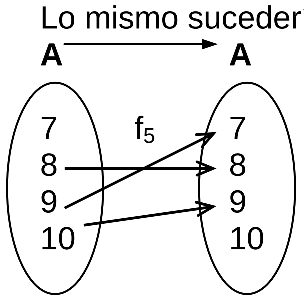
Así en el caso del Ejercicio 3:



f_3 sería función con dominio restringido

Dom f_3 = { 7, 8, 9}

Lo mismo sucedería con el Ejercicio 3:



f_5 es función con dominio restringido

Dom f_5 = { 8, 9, 10 }

y en f_6 Dom f_6 = { 9, 10 }

OTRAS FUNCIONES :

Así como se han representado o definido en forma de diagramas sagitales (algunas de las cuales son funciones), también podemos encontrar funciones definidas en forma de tablas.

Por ejemplo:

EDAD PEDRO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**x**
EDAD JUAN	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**y**

o por una ecuación o fórmula tal como:

EDAD JUAN = EDAD PEDRO + 2

La cual, si usamos la asignación de variables:
EDAD JUAN = y
EDAD PEDRO = x

Se convierte en la forma $y = x + 2$

La EDAD de JUAN es una función de la EDAD de PEDRO que representa en este caso algebraicamente la tabla de valores inicial.

Donde x = Variable independiente
y = Variable dependiente (su valor **depende** del valor que se le asigne a " x ")

Con esta nueva modalidad de representar las relaciones, diremos que:
Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinada si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.

1.4 VARIABLES INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES :

La segunda variable, a la cual se pueden asignar valores a voluntad dentro de los límites que dependen del problema particular, se llama la variable independiente o el argumento. La primera variable, cuyo valor queda definido cuando se asigna un valor a la variable independiente, se llama la variable dependiente o la función.

1.5 NOTACION DE FUNCIONES :

El símbolo f (x) se emplea para designar una función de " x ", y se lee **f de x** .-
f(x) representa la única imagen que puede tener "x"

Con el objeto de distinguir entre diferentes funciones se cambia la letra inicial, como en F (x), h (x), etc.

Evaluar una función es buscar cuál es la imagen, y se logra reemplazando la variable independiente en la expresión algebraica que relaciona ambas variables.

por ejemplo: si $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ $\qquad f(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 5\cdot(-2) + 6 = 28$

$f(2a) = 3\cdot(2a)^2 - 5\cdot(a) + 6 = 12a^2 - 5a + 6$

$f(h-3) = 3\cdot(h-3)^2 - 5\cdot(h-3) + 6 = 3(h^2 - 6h + 9) - 5h + 15 + 6 =$

$= 3h^2 - 18h + 27 - 5h + 15 + 6 = 3h^2 - 23h + 48$

1.6 RECORRIDO DE UNA FUNCION :

Es el conjunto de valores que toma la variable independiente y no necesariamente tiene que ser igual al conjunto B o Codominio.

Es el conjunto formado por las segundas componentes del par ordenado que pertenecen a la función.

Rec f $\subseteq B$

Otros Ejemplos de Funciones definidas mediante una fórmula podrían ser:

* Longitud de una Circunferencia = 2 π R
  donde Long Circunferencia = f (R) R = variable independiente
  Long $\otimes$ = variable dependiente
* Area $\otimes = \pi R^2$
  A = f (R) R = variable independiente
  A = variable dependiente
* Sea y = edad del padre
  x = edad del hijo

  y = x + 25 y = f (x)

La edad del padre es 25 años más que la edad del hijo x = variable independiente
y = variable dependiente

* La relación más elemental de la altura o posición vertical de un proyectil es:

  $y = y_0 + v_0 \operatorname{sen} \alpha t + g t^2 / 2$ y = f (t)

  Donde y_0 , v_0 , α, g son constantes

  y = altura ó posición (variable dependiente)
  t = tiempo (variable independiente)

* $y = \sqrt{x}$ ó $f(x) = \sqrt{x}$

Igualdad de Funciones:

Definición: Dos funciones son iguales si y sólo si Dom F = Dom G y
$\forall x \in$ Dom F (F(x) = G(x))

1.8 FUNCIONES REALES :

Son todas aquellas funciones definidas en $\Re \times \Re$

p. ej: $f(x) = \frac{1}{x}$ Dom f = $\Re^{*} = \Re - \{ 0 \}$

$g(x) = \sqrt{x}$ Dom g = $\Re_0^{+}$

$h(x) = \frac{2}{3-x} + \frac{5}{2x+1}$ Dom h = $\Re - \{ 3, ½ \}$

Para determinar el recorrido de una función, debemos despejar "**x**" en función de "**y**" para obtener las restricciones de esta última.

p. ej : $y = f(x) = \frac{1}{x}$ $y = \frac{1}{x}$ $x = \frac{1}{y}$ x e $y \neq 0$ $\boxed{\text{Rec f} = \Re^{*}}$

$g(x) = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x}$ $y^2 = x$ Sin restric. $\boxed{\text{Rec f} = \Re}$

$t(x) = \frac{2x}{x-1}$ $y = \frac{2x}{x-1}$ $y(x - 1) = 2x$

$yx - y = 2x$ / +-2x

$yx - 2x = y$

$x(y - 2) = y$ / $\cdot \frac{1}{(y-2)}$

$x = \frac{y}{(y-2)}$ $\boxed{\text{Rec t} = \Re - \{2\}}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES:

Sean F y G funciones, entonces la función G compuesta con F se define por:

$$G \circ F = \{(x, y) \in \text{Dom } F \times \text{Rec } G \ / \ y = G(F(x))\}$$

para $x \in$ Dom F con $F(x) \in$ Dom G se tiene $G \circ F = G(F(x))$

$$\text{Dom } (G \circ F) = \{x \in \text{Dom } F \ / \ F(x) \in \text{Dom } G\}$$

Ejemplo:

Sea $F(x) = x + 1 \wedge G(x) = \frac{1}{x^2}$ $G \circ F(x) = G(x + 1) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Dom $(G \circ F) = \{x \in \text{Dom } F \ / \ F(x) \in \text{Dom } G\}$

$= \{x \in \Re \ / \ x \neq -1\} = \Re - \{-1\}$

<u>REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION</u> :

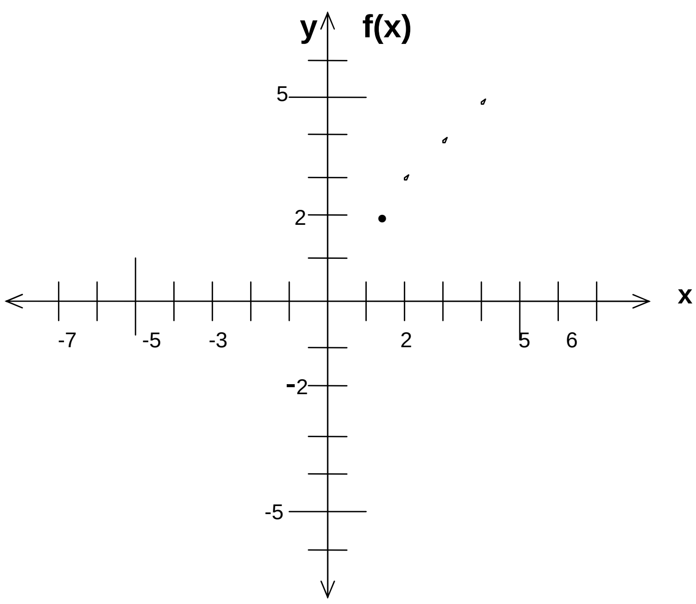
Para representar gráficamente una función se asignan diferentes valores arbitrarios a la variable independiente y se evalúa o valora la función, obteniéndose de esta manera un par ordenado que se lleva a un sistema cartesiano de Referencia

Gráficamente se utiliza el eje de las abcisas para el Dominio o variable independiente, mientras que en el de las ordenadas, se utiliza para la imagen de los elementos del dominio o sea f(x).

Ejercicio: Definamos la $f : N \rightarrow N$ según la Relación

$$y = f(x) = x + 1$$

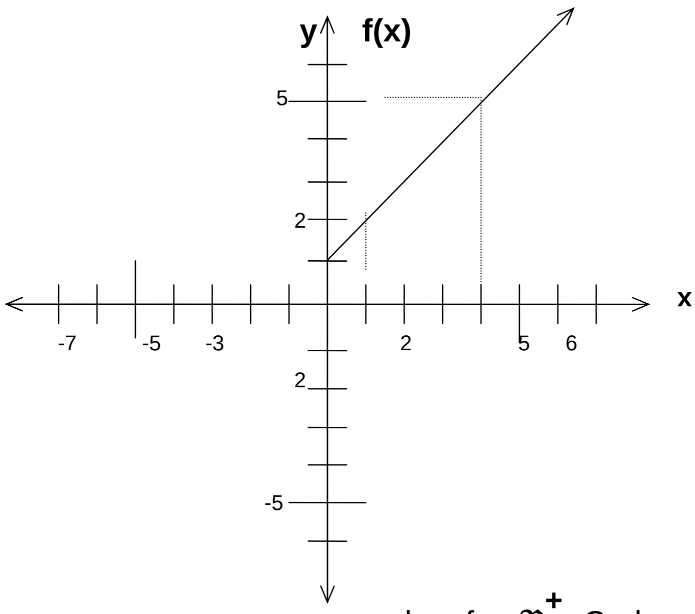
Variable independiente = x
Variable dependiente = y
dom f = **N** Codom f = **N**
Rec f = { 2, 3, 4, 5, ... }
Rec f = { y $\in$ **N** / x > 1 }



OJO : No se puede trazar una recta porque se está trabajando con el conjunto de **N.**

Distinta sería la situación si f : $\Re^{+} \longrightarrow \Re$, según la relación

$y = f(x) = x + 1$



dom f $= \Re^{+}$ Codom f $= \Re$

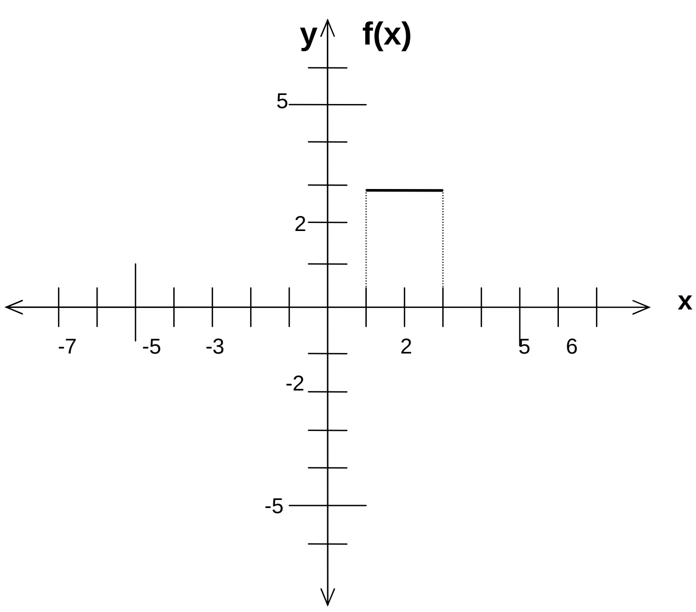
Rec f = { 2, ⋯, 2,5, ⋯ ,2,8, ⋯}

Rec f = { $y \in \Re$ / $y > 1$ }

Al graficar en el conjunto **N** son puntos, mientras que en $\Re$ es una recta.

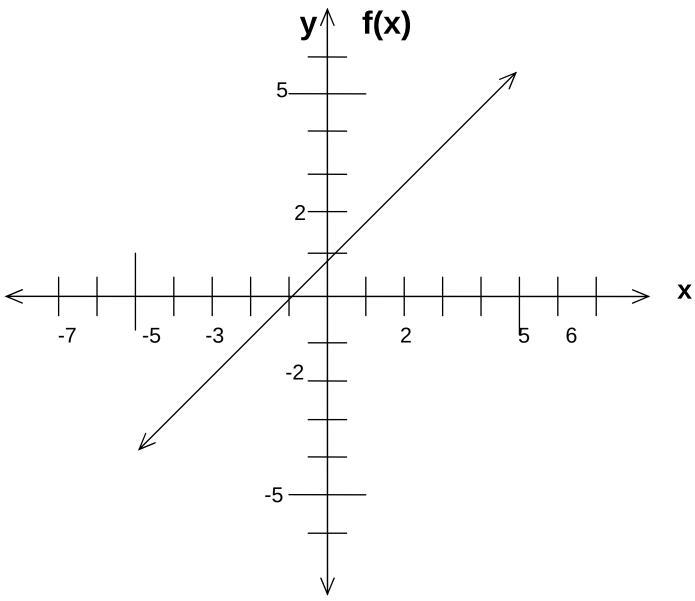
Ejercicio : Dado A = { $x \in \Re$ / $1 \le x \le 3$ } y B = $\Re$

Representar gráficamente f : $A \rightarrow B$ definida por f(x) = 3



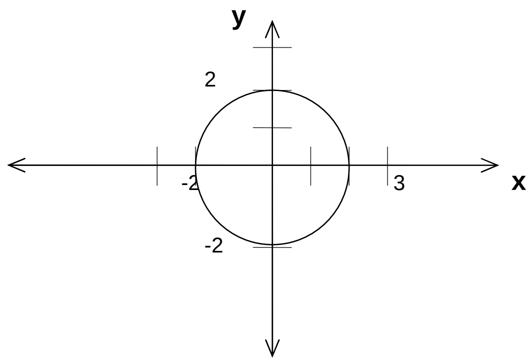
Ejercicio : Representar gráficamente la función f : $\Re \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = \{ (x; y) / y = x + 1 \}$$



Ejercicio : Representar gráficamente la relación g : $\Re \rightarrow \Re$ definida por

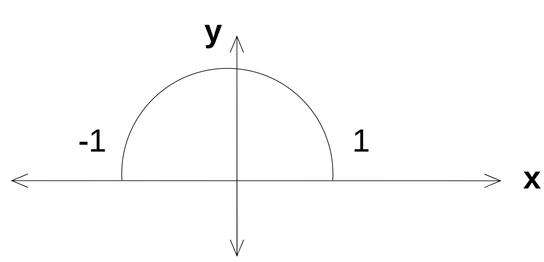
$$g = \{ (x; y) / x^2 + y^2 = 4 \}$$



no es función

Ejercicio : Representar gráficamente la función h : $\Re \rightarrow \Re$ dada por la expresión

$$g = \{ (x; y) \in \Re \times \Re / y = \sqrt{1 - x^2} \}$$



Semicircunferencia ($y \geq 0$) g es **función con dominio restringido**

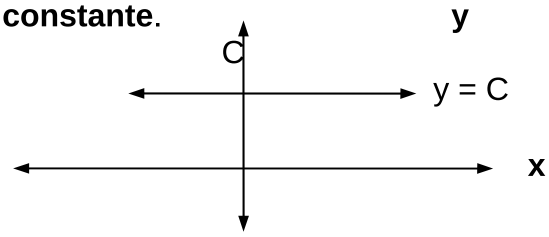
1. 9 ALGUNAS FUNCIONES EN $\Re$:

1. 9. 1 Función Constante:

Si **C** es una constante real, la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por f(x) = **C** se denomina **función constante**.

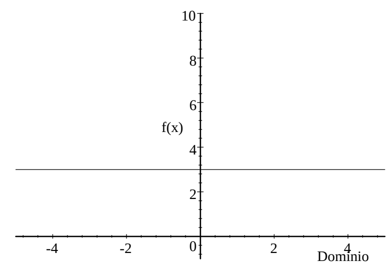
Representada gráficamente

dom f = $\Re$
rec f = {C}



p. ej : f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por f(x) = 3 **,** entonces

la gráfica de la función es una paralela al eje **x** que pasa por la ordenada **y = 3**

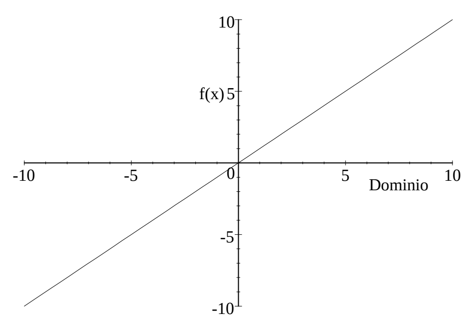


Función identidad:

Es la función f : $\Re \rightarrow \Re$ definida por f(x) = x

Representada gráficamente resulta una recta que divide en dos partes iguales al I y al III cuadrante

Dom f = $\Re$
Rec f = $\Re$

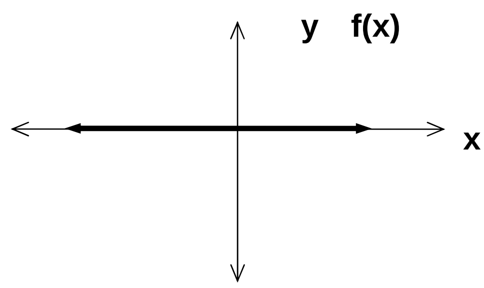


Función cero:

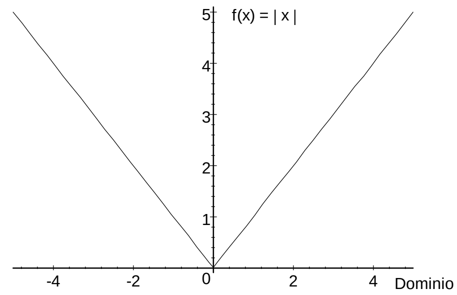
Es la función f : $\Re \rightarrow \Re$ definida por f(x) = 0

Representada gráficamente resulta una recta que coincide con el eje **x**

Dom f = $\Re$
Rec f = $\Re$



Función Valor absoluto (f módulo)

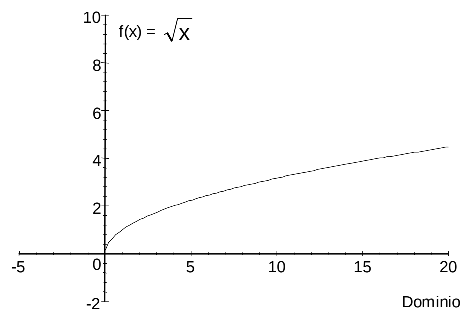


Es la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = | x |$$

Dom f(x) = $\Re$
Rec f(x) = $\Re^+ \cup \{0\}$

Función Raíz cuadrada

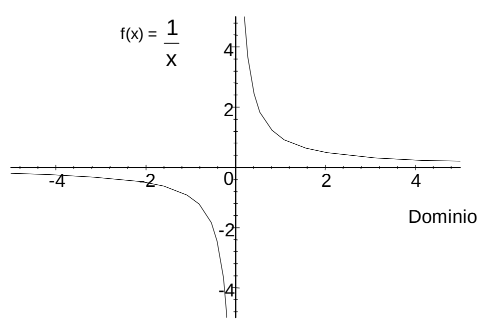


Es la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Dom f(x) = $\Re^+ \cup \{0\}$
Rec f(x) = $\Re^+$

Función recíproca

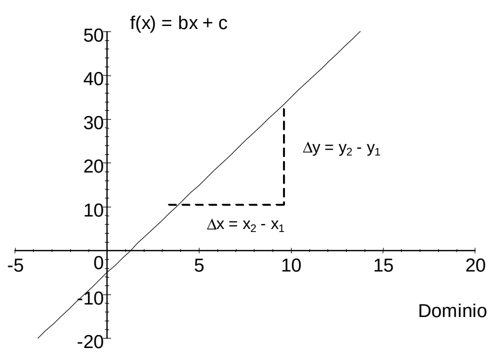


Es la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Dom f(x) = $\Re$ - {0}
Rec f(x) = $\Re$ - {0}

Función Lineal



Es la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = bx + c$$

Dom f(x) = $\Re$
Rec f(x) = $\Re$

Donde el coeficiente de posición es el intercepto con el eje de la "y" y está definido por la constante "c" de la función

y la pendiente " m" está definida por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

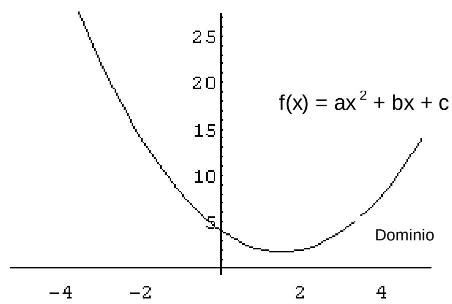
la pendiente de la función, que es siempre constante, está indicada en la función, por el coeficiente que acompaña a las " x ", quedando la función, escrita de la siguiente manera:

$$f(x) = mx + c$$

Función cuadrática:

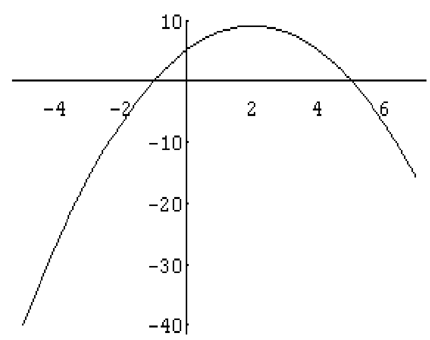
Es la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Representada gráficamente resulta una parábola de la forma

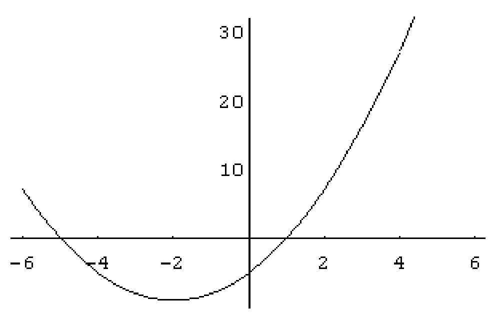


o según sea el signo de **a** y los valores de las constantes **a, b, c** puede tomar otras formas

p. ej en esta función, **a < 0** la parábola queda abierta hacia abajo



p. ej la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ corta al eje de las x en dos partes según la forma



La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx +$ corta el eje del dominio en dos puntos que se conocen como las raíces de la función. Esta situación se presenta cuando la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se hace igual a cero (encontrar las raíces de la función es determinar los valores de la variable independiente, para los cuales su imagen es cero).
Cabe destacar que encontrar las raíces de la función implica resolver la ecuación de 2º grado que se produce al hacer $ax^2 + bx + c = 0$ cuyas soluciones se obtienen adecuando la función de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad /\cdot \frac{1}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$
$$x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a\cdot a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$
$$\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{4ac}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}\right)=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$
$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0$$

de donde se desprende que:

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0 \quad\vee\quad \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0$$

$$\boxed{x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\vee\quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

que se resume en lo que habitualmente se conoce como la " fórmula" para resolver la ecuación de 2º grado

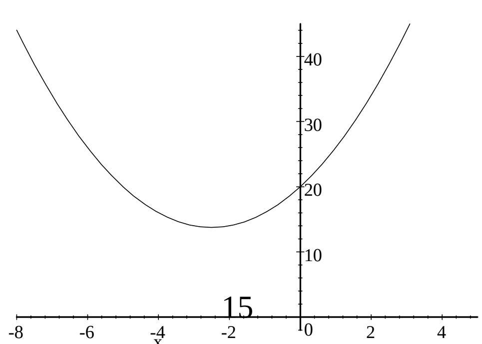
$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

En estas soluciones se puede observar que si $(b^2 - 4ac) < 0$, entonces no existen soluciones reales para la ecuación de 2º grado, lo que significa que la función cuadrática no tiene soluciones reales y esto significa que la función no corta el eje del dominio.

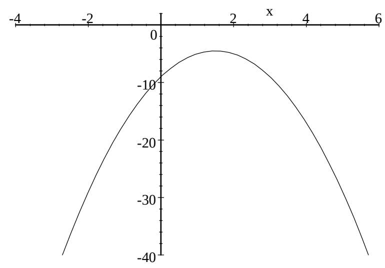
A la expresión $b^2 - 4ac$ se le conoce como el **discriminante** y se designa Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

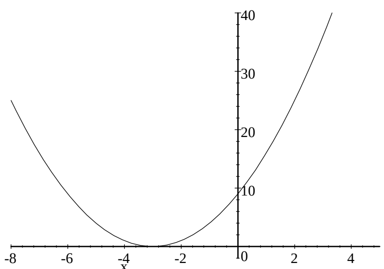
Si **$\Delta < 0$, y $a > 0$**, entonces la función no corta el eje del dominio y es abierta hacia arriba. En este caso se tiene que la función es siempre positiva.



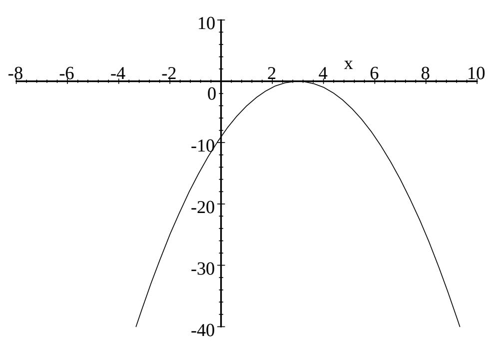
Si Δ **< 0, y a < 0**, entonces la función no corta el eje del dominio y es abierta hacia abajo. En este caso se tiene que la función es siempre negativa.



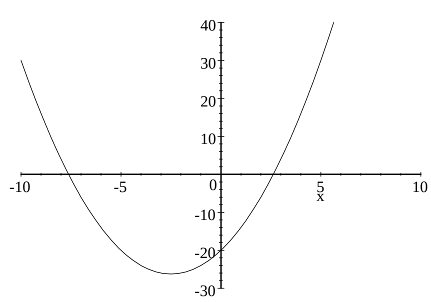
Si Δ **= 0 y a > 0**, la función corta el eje en un solo punto que son las dos raíces iguales de la función ($x_1 = x_2$) y abre hacia arriba. En este caso se tiene que la función es siempre positiva excepto para el pto $x = x_1 = x_2$ en que la función vale cero.



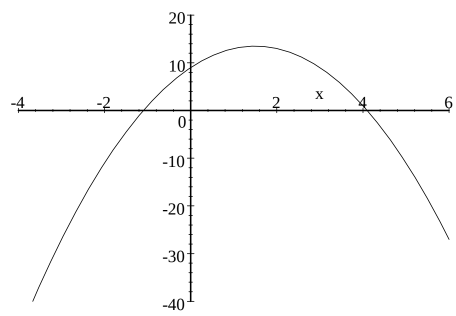
Si Δ **= 0 y a < 0**, la función corta el eje en un solo punto que son las dos raíces iguales de la función ($x_1 = x_2$) y abre hacia abajo. En este caso se tiene que la función es siempre negativa excepto para el pto $x = x_1 = x_2$ en que la función vale cero.



Si Δ **> 0, y a > 0**, entonces la función corta el eje del dominio en dos puntos que son las dos raíces de la función ($x_1 \wedge x_2$) y es abierta hacia arriba. Si $x_1 < x_2$ entonces la función f(x) > 0 en el intervalo $]-\infty, x_1[\cup] x_2, \infty[$.
La función f(x) < 0 en el intervalo $] x_1, x_2 [$
La función f(x) = 0 en $\{ x_1, x_2 \}$



Si Δ **> 0, y a < 0**, entonces la función corta el eje del dominio en dos puntos que son las dos raíces de la función ($x_1 \wedge x_2$) y es abierta hacia abajo. Si $x_1 < x_2$ entonces la función f(x) < 0 en el intervalo] **-** ∞ , x_1[$\cup$] x_2 , ∞ [.
La función f(x) > 0 en el intervalo] x_1, x_2 [
La función f(x) = 0 en { x_1, x_2 }



Cabe destacar que en ningún caso " a" puede valer cero, porque dejaría de ser una función cuadrática.

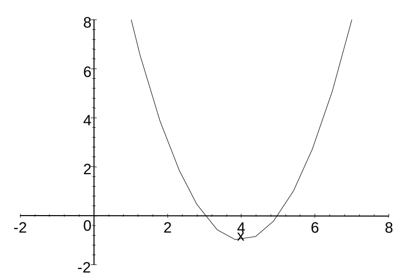
Coordenadas del vértice:

las coordenadas del vértice vienen dadas por $x = -\dfrac{b}{2a} \wedge y = c - \dfrac{b^2}{4a}$

así por ejemplo la función de 2º grado

$$f(x) = x^2 - 8x + 15$$

está representada por el gráfico, donde se observa que es abierta hacia arriba porque a > 0 y tiene dos raíces reales por su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$



Cuyas raíces para f(x) = 0 son:

$$x_1 = 3 \wedge x_2 = 5$$

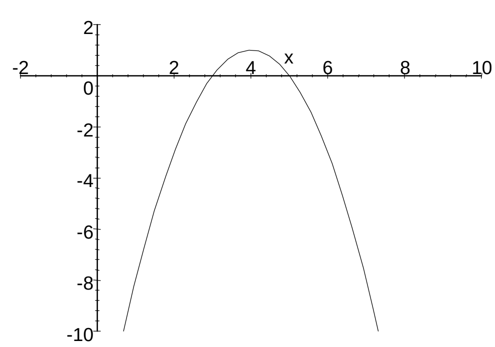
además se puede observar que f(x) > 0 en] **-** ∞, 3[$\cup$] 5, ∞[y es f(x) <0 en] 3, 5[siendo f(x) = 0 en {3, 5}

Las coordenadas del vértice son:

$$x = -\frac{-8}{2} = 4 \wedge y = 15 - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 1} = -1$$

En cambio la función
$g(x) = -x^2 + 8x - 15$ cuya gráfica se muestra, es abierta hacia abajo porque a < 0, tiene dos raíces reales porque Δ > 0

Las coordenadas del vértice son (4, 1)



1. 10. TIPOS DE FUNCIONES

1. 10. 1 Función inyectiva :

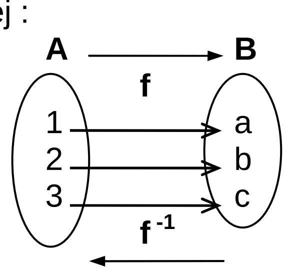
Si f es una función, f es inyectiva (uno a uno) si y sólo si

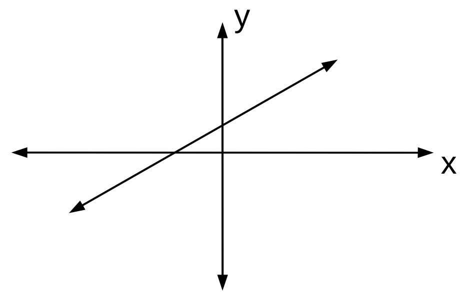
$$\forall x \in \text{ Dom } f \ \forall y \in \text{ Dom } f \ (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$$

f es una función inyectiva si y sólo si

$$\forall x \in \text{ Dom } f \ \forall y \in \text{ Dom } f \ (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

p. ej :





$\mathbf{f} \ : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$
$\mathbf{f^{-1}} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$

$\mathbf{f} \ : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
$\mathbf{f^{-1}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

Sin embargo la $f(x) = x^2$ no es una función inyectiva porque hay elementos diferentes del dominio de f, tales como 1 y -1 que tienen la misma imagen.

$f(x) = 2x + 1$ es inyectiva ya que si $a \neq b$ $f(a) \neq f(b)$

Ejemplo: Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ con Dom f = $\Re$ - {1} es inyectiva.

Sean x, y $\in \Re$ - {1} f(x) = f(y)

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1}$$

$$(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$$

$$xy + y - 1 - x = xy - y + x - 1 \quad \rightarrow 2y = 2x \quad \rightarrow x = y$$

Por lo tanto $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ es una función inyectiva

Teorema: f es una función inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función

En este caso **Dom f = Rec f** $^{\mathbf{-1}}$ y **Rec f = Dom f** $^{\mathbf{-1}}$

Ejemplo:

Comprobar si $f(x) = x^2$ es una función inyectiva

Como $f^{-1}(y) = y^2$ no es una función, $f(x) = x^2$ no es inyectiva.

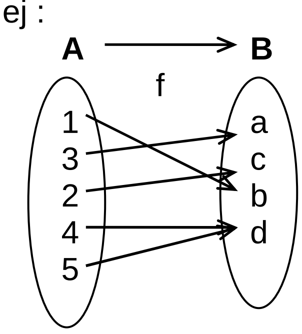
Función Sobreyectiva (epiyectiva) :

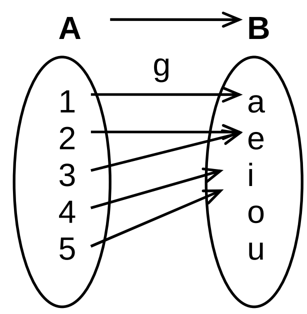
Una función **f** de **A** en **B** es **sobreyectiva** cuando el recorrido coincide con el codominio.

Si f : A $\rightarrow$ B f(x) es epiyectiva si y sólo si f(x) = {(x,y) $\in$ A x B $\wedge$ Rec f = B}

f(x) es sobreyectiva si y sólo si $\forall y \in B \; \exists x \in A$ / (x) = y

p. ej :





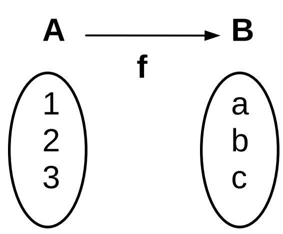
f : **A** $\rightarrow$ **B** es función epiyectiva

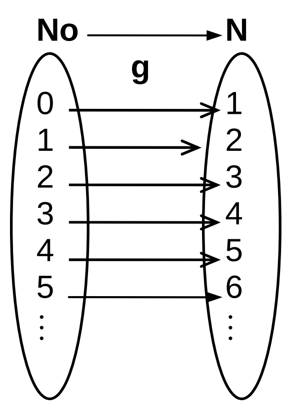
g : A $\rightarrow$ **B** NO es función epiyectiva

Función Biyectiva :

Una función se llama **Biyectiva** si y sólo si **f** es **inyectiva** y **sobreyectiva** al mismo tiempo

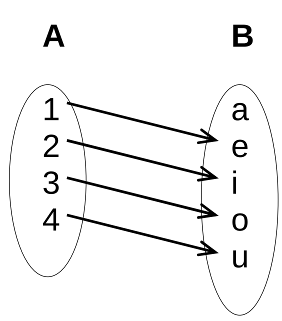
p. ej Funciones **Biyectivas**

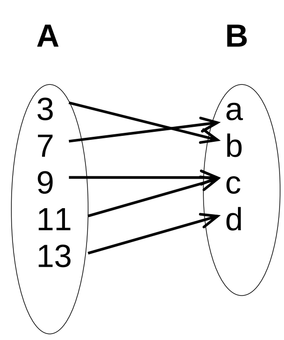




Ambos ejemplos cumplen las características de **inyectiva** y **epiyectiva**

Sin embargo los dos ejemplos que siguen **no son biyectivas**





Si es inyectiva
No es epiyectiva

No es inyectiva
Si es epiyectiva

Función Par:

Si f es una función real, f es una función **par** si y sólo si

$$\forall x \in \text{Dom } f\ (-x \in \text{Dom } f \wedge f(-x) = f(x))$$

Función Impar:

Si es una función real, f es una función impar si y sólo si

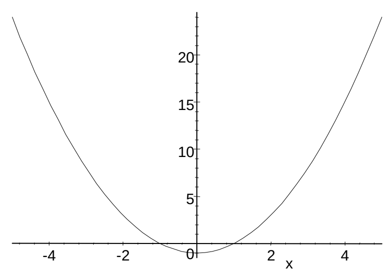
$$\forall x \in \text{Dom } f\ (-x \in \text{Dom } f \wedge f(-x) = -f(x))$$

Si f es una función par y P(x, y) está en el gráfico, entonces P(-x, y) también lo está, con lo cual el gráfico de f será simétrico respecto al eje " y ".

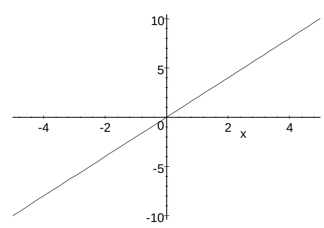
Por ejemplo la función $f(x) = x^2 - 1$ es una función par puesto que

$$f(x) = x^2 - 1 = f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$$

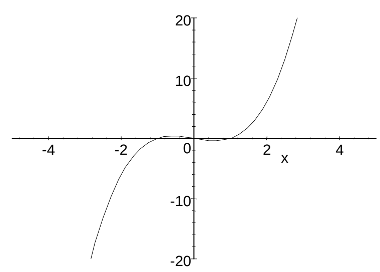
Si procedemos a graficarla, observamos que es simétrica al eje " y "



Ejemplo de función impar, la función lineal $f(x) = 2x$



Otra función impar es la función $f(x) = x^3 - x$, cuya gráfica se muestra



Se observa que si f es impar, $\wedge\ 0 \in \text{Dom } f$, entonces $f(0) = 0$, es decir el gráfico de f pasa por el origen.

Hay funciones que no tienen ninguna de estas dos propiedades, como por ejemplo: $f(x) = 2x + 1$ dado que $f(-x) = -2x + 1 \neq f(x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$

Función creciente:

Sea f una función real e I un intervalo tal que $I \subseteq \text{Dom } f$, se define que:
f es **creciente** en el intervalo I si y sólo si

$$\forall x_1, x_2 \in I\ (x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) \geq f(x_1))$$

Sea f una función real e I un intervalo tal que $I \subseteq \text{Dom } f$, se define que:
f es **estrictamente creciente** en el intervalo I si y sólo si

$$\forall x_1, x_2 \in I\ (x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1))$$

Función decreciente:

Sea f una función real e I un intervalo tal que I $\subseteq$ Dom f, se define que:
f es **decreciente** en el intervalo I si y sólo si

$$\forall x_1, x_2 \in I\ (x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) \leq f(x_1))$$

Sea f una función real e I un intervalo tal que I $\subseteq$ Dom f, se define que:
f es **estrictamente decreciente** en el intervalo I si y sólo si

$$\forall x_1, x_2 \in I\ (x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1))$$

Observar que si una función es estrictamente creciente o decreciente en su dominio, entonces la función es inyectiva (uno a uno); pues si $x \neq y$ entonces ($x < y \vee x > y$) con lo que tendrá en cualquiera de estos casos, ya sea $f(x) < f(y)$ ó $f(x) > f(y)$, es decir $f(x) \neq f(y)$

Función Monónota:

Se dice que una función f en monótona en I si es creciente o decreciente en I

Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez.

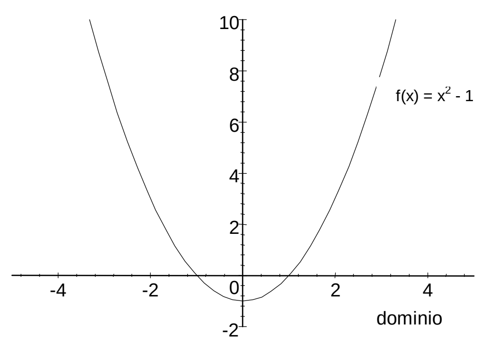
Funciones acotadas:

Sea f una función real $\wedge$ $a \in \Re$

Se dice que a es una cota superior de f si y sólo si $\forall x \in$ Dom f ($f(x) \leq a$).

Se dice que a es una cota inferior de f si y sólo si $\forall x \in$ Dom f ($f(x) \geq a$).

La función $f(x) = x^2 - 1$ tiene como cota inferior a $y = -1$ y no tiene cotas superiores



Una función f es acotada superiormente si y sólo si f tiene cotas superiores.

Una función f es acotada inferiormente si y sólo si f tiene cotas inferiores.

Una función f es acotada si y sólo si f es acotada superior e inferiormente

Función periódica:

Si f es una función real, f es **periódica** si y sólo si existe el menor $p \in \Re^+$ tal que:

$$\forall x \in \text{Dom } f\ (x + p \in \text{Dom } f \wedge f(x + p) = f(x)).$$

El menor p que cumple esta propiedad se llama período de la función.