EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Introducción

El ente básico de la parte de la matemática conocida como ANÁLISIS, lo constituye el llamado sistema de los número reales.

Números tales como: $1, 3, \sqrt[3]{5}$, e, π y sus correspondientes negativos, son usados en mediciones cuantitativas.

Existen dos métodos principales para estudiar el sistema de los números reales. Uno de ellos comienza con un sistema mas primitivo – tal como el conjunto de los números naturales o enteros positivos; 1, 2, 3, 4, ... , y a partir de él, por medio de una secuencia lógica de definiciones y teoremas, se construye el sistema de los números reales.

En el segundo método se hace una descripción formal del sistema de los números reales (asumiendo que existe), por medio de un conjunto fundamental de propiedades (axiomas) de las cuales muchas otras propiedades pueden deducirse.

En esta primer parte, se hará una presentación intuitiva del conjunto $\Re$ de los números reales. Se parte de un conjunto primitivo como es el conjunto **N** de los números naturales y se efectúan las sucesivas ampliaciones del mismo, atendiendo mas a la necesidad de resolver ciertas ecuaciones, en las cuales los conjuntos que se van definiendo resultan insuficientes para la solución, que a un desarrollo axiomático del mismo.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales está constituido por diferentes clases de números. Entre ellas, se pueden mencionar los siguientes 6 conjuntos:

1. Conjunto de los números naturales.

El conjunto de los números naturales, que se denota por **N** ó también por $\mathbf{Z}^+$, corrientemente se presenta asi:

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

La notación de conjunto que incluye los puntos suspensivos es de carácter informal.

Este conjunto permite fundamentar las sucesivas ampliaciones que se hacen, de los sistemas numéricos, y lleva principalmente a la consideración de los números reales.

2. Conjunto de los números enteros.

El conjunto de los números enteros, que se denota por **Z** , corrientemente se presenta asi:

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

En el conjunto de los números enteros, se pueden resolver ecuaciones que no tienen solución en **N** , como sucede por ejemplo con la ecuación $x + 3 = 1$, cuya solución es $x = -2$.

Puede notarse que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

3. Conjunto de los números racionales.

El conjunto de los números racionales, que se denota por **Q**, se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ / \ m, n \text{ son enteros y } n \neq 0 \right\}$$

La introducción de los números racionales responde al problema de resolver la ecuación:

$ax = b$, con $a, b \in R$, $a \neq 0$.

Ésta sólo tiene solución en **Z** , en el caso particular en que a es un divisor de b.

Note que todo entero *n* puede escribirse como el número racional *n*/1 y, en consecuencia, se puede concluir que:

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

En lo sucesivo, cuando se haga referencia a los números racionales, a/b, c/d, ..., se entenderá que a, b, c, d, ..., son números enteros y que los denominadores son diferentes de cero.

4. Conjunto de los números irracionales.

En muchos temas de la geometría se plantea en general, problemas para cuya solución el conjunto **Q** de los números racionales resulta insuficiente. Asi, por ejemplo, al considerar el problema de determinar el número x que mide la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado sea la unidad, el teorema de Pitágoras permite establecer que x, satisface la ecuación: $x^2 = 2$.

Puede demostrarse fácilmente, que no existe $\mathbf{X} \in \mathbf{Q}$ que verifique esta última ecuación. En general, una ecuación de la forma $x^n = a$, con $a \in \mathbf{Q}$ y $n \in \mathbf{N}$, carecerá (excepto casos particulares) de solución. Se hace por lo tanto necesario, describir otro conjunto, en el cual, ecuaciones como las anteriores tengan solución.

El conjunto de los números irracionales, que se denota por $\mathbf{Q}^*$, está constituido por los números reales que no admiten la representación racional.

Ejemplos de esta clase de números son: el número e (base del logaritmo natural), π , $\sqrt{2}$ etc.

En este conjunto, se pueden resolver ecuaciones que no tienen solución en **Q** , como sucede, por ejemplo, con la ecuación $x^2 - 2 = 0$, cuyas soluciones son: $x = \pm\sqrt{2}$, que no son números racionales.

5. Conjunto R de los números reales R =Q $\cup$ Q*.

En el conjunto **R** de los números reales, están definidas dos operaciones: adición (+) y multiplicación ($\cdot$), las cuales verifican las siguientes propiedades (llamadas también axiomas de cuerpo).

Axiomas de cuerpo

5.1. **Clausura**

Si se suman entre si dos números reales, el resultado que se obtiene es un real único.

Si se multiplican entre si dos números reales, el resultado que se obtiene es un real único.

5.2. **Conmutativa** $\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$ $\forall$ a, b $\in$ **R** ,

5.3. **Asociativa** $\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \end{cases}$ $\forall$ a, b,c $\in$ **R** ,

5.4. **Elemento Neutro**

Existe el real 0 (cero) tal que para todo a $\in$**R** , a + 0 = 0 + a = a

Existe el real 1 (uno), 1 $\neq$ 0 tal que, para todo a $\in$**R**, a . 1 = 1 . a = a

El real 0 es llamado: **elemento neutro aditivo**.

El real 1 es llamado: **elemento neutro multiplicativo**.

5.5. **Inverso.**

Para cada número real a, existe un real único llamado **el inverso aditivo** de a, y que se denota –a tal que:

$$a + (-a) = 0$$

Para cada número real a $\neq$ 0, existe un real único llamado **el recíproco** de a, **(inverso multiplicativo)** y que se denota por a^{-1} ó $\frac{1}{a}$ tal que:

$$a\ .\ a^{-1} = a.\ \frac{1}{a} = 1$$

Asi por ejemplo, el opuesto aditivo de 5 es -5; el recíproco (inverso multiplicativo) de -2 es $-\frac{1}{2}$.

Debe notarse que -a no significa un número negativo, aunque en algunas ocasiones puede serlo. Asi, -3 es negativo y es el opuesto de 3, mientras que -(-5) es positivo y es el opuesto de –5.

El **inverso aditivo** de a también se conoce como **opuesto**, el **recíproco** de a también es llamado **inverso multiplicativo** de a.

5.6. **Distributiva**

$$\forall\, a, b, c, \in \mathbf{R}, \qquad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

CONSECUENCIAS IMPORTANTES DE LOS AXIOMAS DE CUERPO

A continuación se presenta sin demostración las consecuencias mas importantes de los axiomas de campo. Más que una simple lista, son propiedades conocidas por el estudiante y que le serán bastante útiles en el desarrollo del curso. En algunas demostraciones de los teoremas del cálculo, haremos referencia a ellas.

T1. Ley cancelativa para la adición (multiplicación) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$

Si $x \neq 0$, entonces, $xy = xz \Rightarrow y = z$

T2. $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$, la ecuación: $x + a = b$, tiene una y solo una solución en **R**.

T3. $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $x \,.\, 0 = 0$

T4. $x \,.\, y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.

T5. $\forall\, x \in \mathbf{R}$, si $x \neq 0$, entonces $x^{-1} = 1/x \neq 0$.

T6. Si $y \neq 0$, entonces, $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

T7. $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $-(-x) = x$.

T8. Si $x \neq 0$, entonces, $(x^{-1})^{-1} = x$.

T9. $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$, $-(x+y) = (-x) + (-y)$.

T10. Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces: $(xy)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$. Equivalentemente: $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$

T11. Si $b \neq 0$, $d \neq 0$, entonces, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

T12. Si $b \neq 0$, $d \neq 0$, entonces, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$

T13. Si $b \neq 0$, $d \neq 0$, entonces, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

T14. $\forall x \in \mathbf{R}$, $-x = (-1)x$.

T15. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

T16. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

T17. $-(xy) = (-x)y = x(-y)$

T18. $-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$, $y \neq 0$

T19. $x(y-z) = x.y - x.z$

T20. $(x-y) + (y-z) = x - z$

T21. $(a-b) - (c-d) = (a+d) - (b+c)$.

T22. $(a+b) . (c+d) = (a.c + b.d) + (a.d + b.c)$

T23. $(a-b) . (c-d) = (a.c + b.d) - (a.d + b.c)$

T24. $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$

T25. Si $x^2 = x \cdot x$, entonces, $x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y)$

Axiomas de orden

Los axiomas o propiedades del sistema de los números reales que se enuncian a continuación se expresan en términos de un cierto **subconjunto especial de R** (este subconjunto denotado por $\mathbf{R}^+$ se identifica con el conjunto de los reales positivos). En general, cualquier campo que tenga un subconjunto P con las propiedades mencionadas a continuación, es llamado un **campo ordenado**. En el caso particular que se estudiará, estas propiedades permiten establecer que el sistema de los números reales es un **campo ordenado**.

Existe un subconjunto $\mathbf{R}^+$ de R tal que:

Si $a, b \in \mathbf{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbf{R}^+$ $a . b \in \mathbf{R}^+$

$$\forall a \in \mathbf{R}, \begin{cases} a \in \Re^+ \\ a = 0 \\ -a \in \Re^+ \end{cases} \quad \text{sólo una es correcta}$$

Los elementos $a \in \mathbf{R}$, para los cuales $a \in \mathbf{R}^+$, serán llamados: **reales positivos**.

Los elementos $a \in \mathbf{R}$, para los cuales $-a \in \mathbf{R}^+$, serán llamados: **reales negativos**.

DESIGUALDADES

Usando solamente el subconjunto $\mathbf{R}^+$ descrito en A.O.1., se deducen todas las reglas usuales en el trabajo con desigualdades de números reales.

Definiciones

Sean x, y números reales.

Los símbolos

$<$	**representan o se leen**	**"menor que"**
$>$	**representan o se leen**	**"mayor que"**

Los que se definen por las afirmaciones:

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{R}^+$$
$$x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{R}^+$$

$\leq$	**representan o se leen**	**"menor o igual que"**
$\geq$	**representan o se leen**	**"mayor o igual que"**

Los que se definen por las afirmaciones:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \quad \mathbf{v} \quad x = y$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x > y \quad \mathbf{v} \quad x = y$$

Cada una de las expresiones: $x < y$, $x > y$, $x \leq y$, $x \geq y$ es llamada **una desigualdad**.

De la definición anterior:

$$\mathbf{x > y} \qquad \textbf{es equivalentes con} \qquad \mathbf{y < x}$$

$$\mathbf{x \geq y} \qquad \textbf{es equivalentes con} \qquad \mathbf{y \leq x}$$

Por otro lado:

$$\mathbf{x < y < z \quad \Leftrightarrow \quad x < y \quad \wedge \quad y < z.}$$

$$\mathbf{x > y > z \quad \Leftrightarrow \quad x > y \quad \wedge \quad y > z.}$$

En cualquiera de los dos casos anteriores, se dice que y está entre x y z.

Interpretaciones similares pueden establecerse para las desigualdades: $x \leq y \leq z$; $x \geq y \geq z$; $x < y \leq z$; $x \leq y < z$, etc.

Claramente, Si $a \in \mathbf{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$

Si a es negativo $\quad \Leftrightarrow \quad a < 0$

Las propiedades siguientes, que enunciamos sin demostración son consecuencia inmediata de la propiedad de orden y serán útiles en el trabajo con desigualdades.

CONSECUENCIAS PRINCIPALES DE LA PROPIEDAD DE ORDEN

1. Tricotomía.

Si x, y $\in$**R** , entonces, **una y solo una** de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$x > y \ ; \qquad x = y \ ; \qquad x < y.$$

2. Transitiva.

$\forall$ x, y, z $\in$**R** , $\quad x < y \quad \wedge \quad y < z \quad \Rightarrow \quad x < z.$

$$x > y \quad \wedge \quad y > z \quad \Rightarrow \quad x > z$$

3. Si x, y, z $\in$R , entonces:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad x + z < y + z \quad \wedge \quad x - z < y - z$$

$$x > y \quad \Rightarrow \quad x + z > y + z \quad \wedge \quad x - z > y - z$$

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \quad \wedge \quad x - z \leq y - z$$

$$x \geq y \quad \Rightarrow x + z \geq y + z \quad \wedge \quad x - z \geq y - z$$

4. $\quad \mathbf{a > b > 0 \quad \wedge \quad c \geq d > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot d}$

5. Las siguientes reglas de los signos para la adición y multiplicación de reales se cumplen:

(Número positivo) + (Número positivo) = Número positivo

(Número negativo) + (Número negativo) = Número negativo

(Número positivo) · (Número positivo) = Número positivo

(Número negativo) · (Número negativo) = Número positivo

6. $\quad \mathbf{a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c.}$

$$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c.$$

Las dos propiedades anteriores, muchas veces se expresan diciendo que si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por una cantidad positiva, el sentido de la desigualdad se conserva, mientras que si se multiplican por una cantidad negativa, el sentido de la desigualdad cambia.

7. $\forall$ **x** $\in$**R ,** $\mathbf{x^2 \geq 0}$ $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

8. **x > 0** $\Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

9. **x > y > 0** $\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Una manera de representar geométricamente los números reales, consiste en tomar una recta generalmente en forma horizontal, y fijar dos puntos distintos en ella, denotando con 0 (cero) al de la izquierda y con 1 (uno) al de la derecha.

Se considera que cada punto de la recta corresponde a un número real y viceversa, a cada número real le corresponde uno y solo un punto de dicha recta. Se establece de esta forma, una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de esta recta, la cual nos permite decir en adelante que cada punto "es" un número real. A la recta sobre la cual se hace representaciones de los números reales, se seguirá llamando: RECTA REAL, ó, también, RECTA NUMÉRICA.

Recurriendo a la idea de distancia y tomando como unidad de longitud el segmento de recta entre 0 y 1, que en adelante se llamará **segmento unitario**; como punto de partida el 0, que en adelante se llamará **origen**; como números positivos los puntos que se dan a la derecha del origen y negativos, los que se dan a su izquierda, se puede entonces localizar algunos números reales. Así, para localizar los números enteros, se lleva sucesivamente, y a ambos lados de 0 y 1, el segmento unitario como aparecen en la figura adjunta.

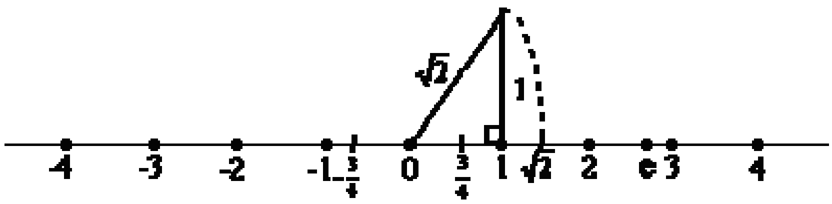


fig. 1.

Existe una construcción geométrica sencilla para localizar números racionales en la recta real. Ilustremos el procedimiento por medio de un ejemplo. Para representar, digamos el número racional 12/5, se traza por el origen 0 de la recta real una segunda recta oblicua y a partir de 0 se marcan cinco (5) segmentos iguales sobre la oblicua con extremos en P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5. (Ver fig. 2).

A continuación, se traza la recta que une a P5 con el racional $3 = \frac{15}{5}$ y luego cuatro rectas paralelas a la anterior y que pasen por los puntos P1, P2, P3, P4 y P5. Por geometría elemental se sabe que este sistema de rectas paralelas corta al segmento entre 0 y 3 en cinco partes iguales de manera que la longitud de cada parte es 3/5.

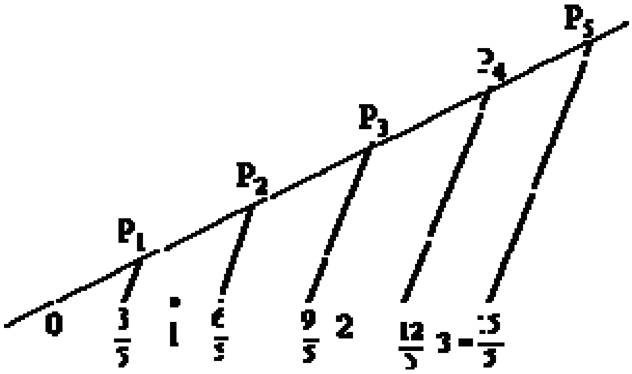


Fig.2

En consecuencia, cada punto de corte en la recta real corresponde en forma sucesiva a los racionales: 3/5, 6/5, 9/5, 12/5 y 15/5 entre los cuales se encuentra el racional que se quería representar en la recta.

Para los enteros positivos que no son cuadrados perfectos, se puede demostrar que su raiz cuadrada es un número irracional, cuya localización en la recta numérica se logra de una manera sencilla empleando el teorema de Pitágoras (Ver fig. 3).

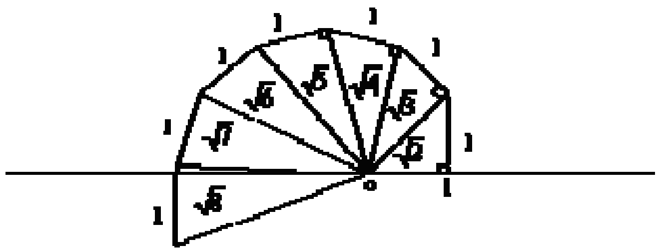


Fig 3

Otros números irracionales como $\pi \approx 3.1415927...$ y $e \approx 2.7182818...$ serán localizados en su forma decimal aproximada.

Intervalos

Dentro de los subconjuntos infinitos del conjunto de los reales, se destacan 9 de ellos, llamados **intervalos** y que se definen de la siguiente forma:

Definiciones

Sean $a, b \in R$, con $a < b$.

El conjunto de puntos $(a, b) = \,]a, b[\, = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a < x < b\}$ **INTERVALO ABIERTO** se representa geométricamente en la recta real en la forma:
Nótese que: $a \notin (a, b) \quad \wedge \quad b \notin (a, b)$,

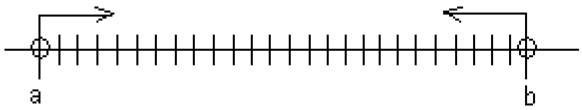


Fig 4

El conjunto de puntos $[a, b] = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a < x < b\}$ **INTERVALO CERRADO** se representa geométricamente en la recta real en la forma:
Nótese que: $a \in [a, b], \quad \wedge \quad b \in [a, b]$

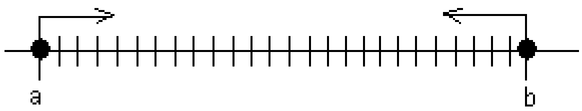
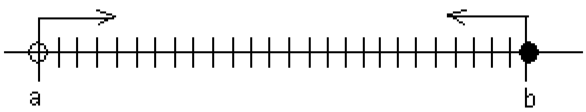
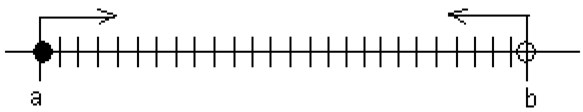
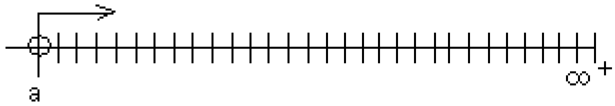
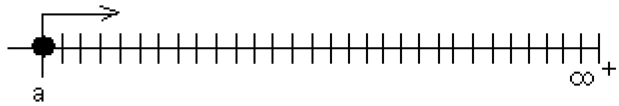
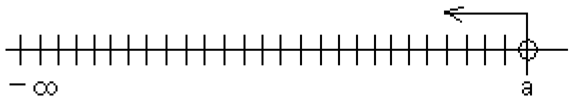
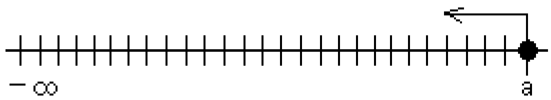


Fig 5

De manera similar, se pueden definir y representar geométricamente los demás tipos de intervalos

$(a, b] = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a < x \leq b\}$	 Fig. 6
$[a, b) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a \leq x < b\}$	 Fig. 7

Sea a $\in$ **R** un intervalo de cualquiera de las siguientes formas se llama: **SEMIRECTA**.

$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a < x < +\infty \}$	 Fig. 8
$[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a \leq x < +\infty \}$	 Fig. 9
$(-\infty, a) =]-\infty, a[= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ -\infty < x < a \}$	 Fig. 10
$(-\infty, a] =]-\infty, a] = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ -\infty < x \leq a \}$	 Fig. 11

Finalmente, el conjunto **R** de los reales, se define como el intervalo: $(-\infty, +\infty)$. Es decir:

$$\mathfrak{R} = (-\infty, +\infty) =]-\infty, \infty[= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ -\infty < x < +\infty \}.$$

Valor absoluto

Definición

Sea x $\in$**R** . El valor absoluto de x, denotado por: $|x|$ se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De esta manera: $|-5| = 5$ $\quad |-8| = 8$ $\quad |6| = 6$ $\quad |0| = 0$

El valor absoluto de un número real x es siempre positivo o cero y se interpreta geométricamente, como la distancia del punto x al origen (fig. 12).

Igualmente, $|x - y|$ se interpreta como la distancia del punto x al punto y en la recta real (fig. 13).

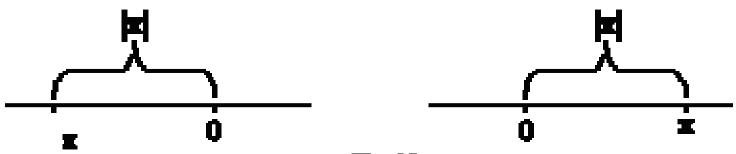


Fig. 12

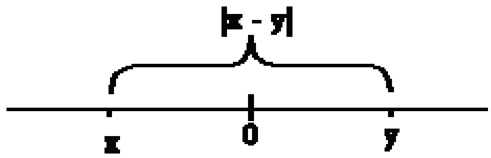


Fig.13

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

1. $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \iff x = 0$

2. $|x| = |y| \iff x = y \lor x = -y$

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall$ x, y $\in$**R**.

4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \qquad y \neq 0$

5. $|-x| = |x| \qquad |x - y| = |y - x|$

6. $|x|^2 = x^2 \qquad |x| < |y| = x^2 < y^2$

7. $|x| < a \iff -a < x < a$ siempre que $a > 0$

8. $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$ siempre que $a > 0$

9. $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x > a \vee x < -a$ siempre que $a > 0$

10. $|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \geq a \vee x \leq -a$ siempre que $a > 0$

11. $-|x| \leq x \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

12. (desigualdad triangular) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall\ x, y \in \mathbf{R}$

¿En que caso se verifica la igualdad? (compruebe).

13. $|x - y| \leq |x| + |y|$

14. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

En una desigualdad que envuelve una incógnita, dígase la letra x, un valor particular de x satisface la desigualdad, si al reemplazar x por su valor particular (en todas sus ocurrencias) la convierte en una proposición verdadera.

Asi por ejemplo, $x = 1$ es un valor particular de x que satisface la desigualdad: $3x-1 < x+5$ ya que $3(1)-1 < 1+5$. Mientras que $x = 4$ no es solución particular.

Resolver una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que la hacen verdadera. En contraste con una ecuación, cuya solución, en general es un número o quizá un conjunto finito de números, el conjunto solución, de una desigualdad consta por lo común de un intervalo, unión infinita de intervalos y en algunos casos el conjunto vacío.

Asi, el conjunto solución de la desigualdad: $x^2 - x < 6$ es el intervalo $(-2, 3)$; el conjunto solución de la desigualdad $x^2 - x \geq 6$ es $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ y el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + 5 < 4$ es el conjunto vacío (¿porqué?).

El procedimiento para resolver desigualdades consiste en transformar la desigualdad inicial en una desigualdad EQUIVALENTE (tiene las mismas soluciones). Las herramientas principales para hacerlo es el uso adecuado de las propiedades de orden y sus consecuencias. Ello implica que debemos realizar ciertas operaciones en una desigualdad sin cambiar el conjunto solución. En particular:

Se puede sumar (restar) la misma cantidad en ambos miembros de una desigualdad.

Se pueden multiplicar (dividir) ambos miembros de una desigualdad por una misma cantidad positiva.

Se pueden multiplicar (dividir) ambos miembros de una desigualdad por una misma cantidad negativa, pero entonces se debe invertir el sentido del signo de la desigualdad.