EJERCICIOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Encontrar lo intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

1. $f(x) = 3x - x^3$

   - $f'(x) = 3 - 3x^2$ $\qquad\qquad$ $3 - 3x^2 = 0$
   - $x = -1$ $\qquad\qquad$ $x = 1$
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
   - **Creciente:**
   - $(-1, 1)$
   - **Decreciente:**
   - $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

- $f'(x) = 4x^3 - 4x \qquad 4x^3 - 4x = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- *Creciente* : $(-1,0) \cup (1,\infty)$
- *Decreciente* : $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

3. $f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$

- $f'(x) = 15 + 12x - 3x^2 \qquad 15 + 12x - 3x^2 = 0$
- $x = -1 \qquad x = 5$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

- Creciente: $(-1,5)$
- Decreciente: $(-\infty,-1) \cup (5,\infty)$

4. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$

- $f'(x) = 12x^3 - 60x^3 - 12x + 60 = 12\left(x^3 - 5x^2 - x + 5\right)$
- $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0 \qquad x = \pm 1 \qquad x = 5$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	↘	↗	↘	↗

- Creciente: $(-1,1) \cup (5,\infty)$
- Decreciente: $(-\infty,-1) \cup (1,5)$

5. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

- $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} \qquad 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
	↗	↘	↘	↗

- Creciente: $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$
- Decreciente: $(-2,0) \cup (0,2)$

6. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

- $x^2+x-2=0$ $\quad x=-2$ $\quad x=1$
- $D=\mathbb{R}-\{-2,1\}$
- $f'(x)=\dfrac{x^2+x-2-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\dfrac{-(x^2+2x+3)}{(x^2+x-2)^2}$
- $\dfrac{-(x^2+2x+3)}{(x^2+x-2)^2}=0$ $\quad x^2+2x+3=0$
- Sin soluciones en $\mathbb{R}$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$		
	↘	↘	↘

- Decreciente: $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

7. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

- $f'(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$ $\quad \dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0$
- $x=0$ $\quad x=3$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
	↗	↗	↘	↗

- **Creciente**:
- $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$
- *Decreciente*
- $(1,3)$

8. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

- $f'(x)=\dfrac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}$ $\qquad \dfrac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}=0$ $\qquad x=\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- *Creciente* : $(-1,0)\cup(1,\infty)$
- *Decreciente* : $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

9. $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$

- $f'(x)=\dfrac{4x-x^2}{(2-x)^2}$ $\qquad \dfrac{4x-x^2}{(2-x)^2}=0$ $\qquad x=0$ $\qquad x=4$

x	$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

- *Creciente* : $(0,4)$
- *Decreciente* : $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$

10. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

- $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $\qquad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$ $\qquad x=\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

- *Creciente* : $(-1,1)$
- *Decreciente* : $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

11. $f(x)=x+\sqrt{x}$

- $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=0$
- $2\sqrt{x}+1=0$ $\qquad \sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ Sin solución

x	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$
	$\nearrow$

- *Creciente* : $(0,\infty)$

12. $f(x)=\sqrt{x+1}$

- $x+1\geq 0 \qquad x\geq -1$
- $D=[-1,\infty)$
- $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

x	$(-1,\infty)$
$f'(x)$	$+$
	$\nearrow$

- Creciente: $(-1,\infty)$

13. $f(x)=e^{-(x-1)^2}$

- $f'(x)=-2(x-1)e^{-(x-1)^2} \qquad -2(x-1)e^{-(x-1)^2}=0 \qquad x=1$

x	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

- Creciente: $(-\infty,1)$
- Decreciente: $(1,\infty)$

14. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

- $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

x	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$
	$\searrow$	$\searrow$

- *Decreciente* : $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

15. $f(x)=e^x\left(2x^2+x-8\right)$

- $f'(x)=e^x\left(2x^2+x-8\right)+e^x(4x+1)=e^x\left(2x^2+5x-7\right)$
- $e^x\left(2x^2+5x-7\right)=0 \qquad x=1 \qquad x=-\dfrac{7}{2}$
- $f''(x)=e^x\left(2x^2+9x-2\right)$
- $f''(1)=e^1\left(2\cdot1^2+9\cdot1-2\right)>0 \qquad f(1)=-5e$
- Mínimo $(1,-5e)$
- $f''\left(-\dfrac{7}{2}\right)=e^{-\frac{7}{2}}\left(2\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)-2\right)<0 \qquad f\left(-\dfrac{7}{2}\right)=13e^{-\frac{7}{2}}$
- Máximo $\left(-\dfrac{7}{2},13e^{-\frac{7}{2}}\right)$

16. $f(x)=(x-1)e^{-x}$

- $f'(x)=e^{-x}(2-x)$ $\qquad 2-x=0$ $\qquad x=2$

x	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

- *Creciente* : $(-\infty,2)$
- *Decreciente* : $(2,\infty)$

17. $f(x)=e^x(2x^2+x-8)$

- $f'(x)=e^x(2x^2+x-8)+e^x(4x+1)=e^x(2x^2+5x-7)$
- $e^x(2x^2+5x-7)=0$ $\qquad x=1$ $\qquad x=-\frac{7}{2}$
- $f''(x)=e^x(2x^2+9x-2)$
- $f''(1)=e^1(2\cdot1^2+9\cdot1-2)>0$ $\qquad f(1)=-5e$
- Mínimo $(1,-5e)$
- $f''\left(-\frac{7}{2}\right)=e^{-\frac{7}{2}}\left(2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-2\right)<0$ $\qquad f\left(-\frac{7}{2}\right)=13e^{-\frac{7}{2}}$
- Máximo $\left(-\frac{7}{2},13e^{-\frac{7}{2}}\right)$

18. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

- $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\qquad -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{1}{2}x^2}=0$ $\qquad x=0$

x	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

- *Creciente* : $(-\infty,0)$
- *Decreciente* : $(0,\infty)$

19. $f(x)=x+\ln\left(x^2-1\right)$

- $x^2-1>0$ $\qquad x^2-1=0$ $\qquad x=\pm1$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
	$+$	$-$	$+$

- $D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
- $f'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$
- $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}=0$ $\qquad x=-1+\sqrt{2}\notin D$ $\qquad x=-1-\sqrt{2}$
- $f''(x)=\dfrac{-2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ $\qquad f''(-1-\sqrt{2})=\dfrac{-2\left((-1-\sqrt{2})^2+1\right)}{\left((-1-\sqrt{2})^2-1\right)^2}<0$
- En $x=-1-\sqrt{2}$ hay un máximo

20. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ $\qquad 1-\ln x=0$ $\qquad x=e$

x	$(0,e)$	(e,∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

- *Creciente* : $(0,e)$
- *Decreciente* : (e,∞)