EJERCICIOS APLICACIÓN DERIVADAS

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

- $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

  - $D = \mathbb{R} - \{0\}$
  - $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$ $\qquad 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2$
x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
  - Creciente: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
  - Decreciente: $(-2, 0) \cup (0, 2)$

Hallar los máximos y mínimos de la función:

- $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$

  - $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}=\frac{x^2-x-2}{(x-3)^2}$
  - $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-3)^2-(x^2-x-2)2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{-5x+7}{(x-3)^3}$
  - $\frac{-5x+7}{(x-3)^3}=0 \qquad -5x+7=0 \qquad x=\frac{7}{5}$
  - $f''(x)=\frac{10x-6}{(x-3)^4} \qquad f''\left(\frac{7}{5}\right)=\frac{10\left(\frac{7}{5}\right)-6}{\left(\left(\frac{7}{5}\right)-3\right)^4}>0$
  - $f(x)=\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{5}\right)-2}{\left(\frac{7}{5}\right)^2-6\left(\frac{7}{5}\right)+9}=-\frac{9}{16} \qquad \textit{Mínimo}\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{16}\right)$

Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$.

- $f'(x) = 3x^2 - 6x + 7$
- $f''(x) = 6x - 6$
- $6x - 6 = 0 \qquad x = 1$
- $f'''(x) = 12 \qquad f'''(1) \neq 0 \qquad f(1) = 6$
- Punto de inflexión: (1, 6)
- $m_t = f'(1) = 4 \qquad m_n = -1/4$
- **Recta tangente:** $y - 6 = 4(x - 1)$ $\mathbf{4x - y + 2 = 0}$
- **Recta normal:** $y - 6 = -1/4(x - 1)$ $\mathbf{x + 4y - 25 = 0}$

La cantidad (y) expresa el dinero acumulado en una máquina tragaperras durante un día y sigue una ley del tipo:

$$y = 1/3\ x^3 - 19\ x^2 + 352x + 100$$

donde la variable x representa el tiempo en horas (de 0 a 24). Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Se queda alguna vez vacía de dinero la máquina?

Entre 0 y 24 la función es distinta de cero, por lo cual **la máquina siempre tiene monedas.**

- Hay un mínimo absoluto en (0, 100).

2. Si se realiza la "caja" a las 24 horas. ¿Arroja ganancias para los dueños de la máquina?

- **Ganancia: $f(24) - f(0)= 2212 - 100 = 2112$**

3. ¿A qué hora la recaudación es máxima y a qué hora es mínima?

- $f'(x)= x^2 - 38x + 352$ $\qquad x^2 - 38x + 352 = 0$
- $x = 16$ $\qquad x = 22$
- $f''(x)= 2x - 38$
- $f''(16) = 32 - 38 < 0$ $\qquad$ **Máximo (16, 6700/3)**
- $f''(22) = 44 - 38 > 0$ $\qquad$ **Mínimo (22, 6592/3)**

4. ¿Cuándo entrega el mayor premio?

- El mayor premio será igual al punto de inflexión.
- $f'''(x) = 2$
- $2x - 38 = 0$ $\qquad$ **$x = 19$**

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$. Hallar a y b de manera que la gráfica de la función f(x) tenga para x= 1 una inflexión, y cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX.

- $f'(x) = 3x^2 + 2\ ax + b$ $\qquad f''(x) = 6x + 2a$
- $f'(1) = 1$ $\qquad 3 + 2a + b = 1$
- $f''(1) = 0$ $\qquad 6 + 2a = 0$
- **$a = -3$** $\qquad$ **$b = 4$**

Obtener la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.

- $f'(x) = 6x^2 - 12x$ $f''(x) = 12x - 121$
- $2x - 12 = 0$ $x = 1$
- $f'''(x) = 12$ $f'''(1) \neq 0$ $f(1) = 0$
- Punto de inflexión: (1, 0)
- $f'(1) = 6 - 12 = -6 = m$
- $y - 0 = -6(x - 1)$ $\mathbf{y = -6x + 6}$

Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo, para $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$.

- $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
- $1 = 1 + a + b + c$ $a + b + c = 0$
- $0 = 48 - 8a + b$ $8a - b = 48$
- $0 = 0 - 0 + b$ $b = 0$
- $\mathbf{a = 6}$ $\mathbf{b = 0}$ $\mathbf{c = -6}$

Determinar el valor de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en (0, 4) y un mínimo en (2, 0).

- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
- $f(0) = 4$ $d = 4$
- $f(2) = 0$ $8a + 4b + 2c = 0$
- $f'(0) = 0$ $c = 0$
- $f'(2) = 0$ $12a + 4b + c = 0$
- $\mathbf{a = 1}$ $\mathbf{b = -3}$ $\mathbf{c = 0}$ $\mathbf{d = 4}$

Determinar a, b, c, d y e, de modo que la curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + c\,x^2 + dx + e$, tenga un punto crítico en (1, 3) y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y = 2x$ en (0, 0).

- $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $\qquad$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
- $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $\qquad$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
  - $f(1) = 3$ $\qquad$ $a + b + c + d = 3$
  - $f(0) = 0$ $\qquad$ $e = 0$
  - $f'(1) = 3$ $\qquad$ $4a + 3\,b + 2c + d = 3$
  - $f'(0) = 2$ $\qquad$ $d = 2$
  - $f''(0) = 0$ $\qquad$ $2c = 0$
  - **$a = -5$ $\qquad$ $b = 6$ $\qquad$ $c = 0$ $\qquad$ $d = 2$ $\qquad$ $e = 0$**

La curva $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en (2/3, 1/9). Hallar a, b y c.

- $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad$ $f''(x) = 6x + 2a$
- $f(3) = 0$ $\qquad$ $27 + 9a + 3b + c = 0$
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$ $\qquad$ $\frac{8}{27} + \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{1}{9}$
- $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ $\qquad$ $6 \cdot \frac{2}{3} + 2a = 0$
- $a = -2$ $\qquad$ $b = -\frac{262}{63}$ $\qquad$ $c = \frac{27}{21}$

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c}$$

Calcula a, b y c, de modo que f(x) tenga en (2, −1) un extremo local y que la curva pase por el origen de coordenadas.

- $f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x^2+ax+c)-(x^2+ax+b)(2x+a)}{(x^2+ax+c)^2}$
- $f'(x)=\dfrac{(2x+a)(b-c)}{(x^2+ax+c)^2}$
- $f(2)=-1$ $\qquad \dfrac{2^2+a\cdot 2+b}{2^2+a\cdot 2+c}=-1$
- $f(0)=0$ $\qquad \dfrac{b}{c}=0$
- $f'(2)=0$ $\qquad \dfrac{(2\cdot 2+a)(b-c)}{(2^2+a\cdot 2+c)^2}=0$
- $a=-4$ $\qquad b=0$ $\qquad c=8$

Hallar a y b para qué la función: $f(x) = a \cdot \ln x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Para esos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tienen la función en 1 y en 2?

- $f'(x)=a\dfrac{1}{x}+2bx+1$ $\qquad f''(x)=\dfrac{-a}{x^2}+2b$
- $f'(1)=0$ $\qquad a+2b+1=0$ $\qquad a=-\dfrac{2}{3}$
- $f'(2)=0$ $\qquad \dfrac{a}{2}+4b+1=0$ $\qquad b=-\dfrac{1}{6}$
- $f''(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{3}$
- $f''(1)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{2}{3}>0$ $\qquad$ Mínimo en $x=1$
- $f''(2)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{2}{3}<0$ $\qquad$ Máximo en $x=2$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1 Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

1. $f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$
2. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2}$
4. $f(x) = \sqrt{x+1}$
5. $f(x) = e^{-(x-1)^2}$
6. $f(x) = x \cdot \ln x$

2 Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$
2. $f(x) = e^x \left(2x^2 + x - 8\right)$
3. $f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$
4. $f(x) = \text{sen } 2x$

3 Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión de las funciones:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$

2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

3. $f(x) = e^{-x^2}$

4 La cotización de las sesiones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$C = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$

1. Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

2. Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

5 Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por:

$r = 300t\ (1-t)$.

Donde $0 < t < 1$ es el tiempo en horas. Se pide:

1. ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

2. ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

3. ¿Cuando se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?