1. Funciones reales

Introducción:

Los puntos en el plano cartesiano (o rectangular) se anotan **P(x, y)**; **(x, y)** son las coordenadas del punto P, el número real **a** es la abscisa de P y el número real **b** es la ordenada de P.

Una recta en el plano cartesiano tiene ecuación general $Ax + By + C = 0$, donde A, B, C son números reales.

La recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ tiene ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (1)$$

El número $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se llama pendiente de la recta que pasa por P y Q. Por lo tanto, la ecuación (1) se puede rescribir del siguiente modo:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (2)$$

y corresponde a la ecuación de la recta que pasa por el punto P con pendiente m.

Dos rectas se dicen paralelas si tienen la misma pendiente y se llaman perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

1. Suponiendo que (a, b) es un punto del cuadrante II, determine el cuadrante en el cual se localiza: (-a, -b), (-a, b), (a, -a), (b, a) y (-b, a).
2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(-1, -2) y Q(3, 0) y grafíquela.
3. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos:
   a) A(4, 3) y B(-2, 5).
   b) A(-6, -8) y B(5, 3)
   c) A(3, 2) y B(-1, -6)
4. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $x - y + 4 = 0$, $y = 5x + 3$ y es paralela a la primera.
5. Determine:
   a) La pendiente y los interceptos de la recta de ecuación $3x - 7y + 5 = 0$.
   b) Si los puntos (4, 0), (-3, 3), (2, 1), (-1, 2) pertenecen a la recta de ecuación $2x + 5y = 8$.
   c) La ecuación de la recta que pasa por P(3, 5) con pendiente 3.

d) La ecuación de la recta que pasa por P(1, -1) con pendiente -3.

e) La ecuación de la recta que intersecta el eje X en 5 y el eje Y en 10.

f) La ecuación de la recta que pasa por P(3, -6) y Q(-6, 3)

g) La ecuación de la recta que pasa por P(8, 1) y Q(-3, 1)

6. Demuestre que la recta que pasa por A(a, 0) y B(0, b) tiene ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

7. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento que une (7, 3) con (5, -1) y es perpendicular a dicho segmento.

8. Demuestre que:

a) Las rectas de ecuaciones Ax + By + C = 0 y ax + by + c = 0 son paralelas si y sólo si Ab – aB = 0.

b) Las rectas de ecuaciones ax + by + c = 0 y bx – ay + d = 0 son perpendiculares.

9. Determine, en cada caso, el valor de **k** de modo que la recta **k**x – 3y = 10,

a) Pase por el punto (2, 1).

b) Gráficamente sea una recta horizontal.

c) Sea paralela a la recta y + 2x + 1 = 0.

d) Sea perpendicular a la recta y – 2 = 2(x – 1).

e) Tenga igual intersección en los ejes coordenados X e Y.

10. Determine cuáles de las siguientes relaciones de A en B son funciones:

a) A = {x / x año entre 1980 y 2005}, B = Q (números racionales),
F(x) = IPC anual en Chile en el año x.

b) A = {seres humanos}, B = {seres humanos},
F(a) = hermano de a.

c) A = IN, B = IN, F(n) = 2n – 5.

d) A = IN, B = IR, F(n) = 2n - 5

e) A = IR, B = IR, F(x) = x^2+1.

f) A = IR, B = IR, F(x) = $\frac{3x+1}{x}$

11. Si f(x) = 3-7x, determine f(1), f(-3) y f(0) + f(2)

12. Si $f(x)=x^2-x+1$, determine f(0), f(-4) y f(a+1)

13. Si f(x) = $2\sqrt{3x+1}$, determine f(5), f(0) y f(5) f(0)

14. Grafique la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 2-3x & \text{si} \quad -3 \le x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ 2x-9 & \text{si} \quad 3 \le x \le 7 \end{cases}$

15. Si $g(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{si} \quad -3 \le x < 1 \\ 1+x^2 & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ 7 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$, determine g(1), g(-5), g(4) y bosqueje su gráfico.

16. Dibuje las parábolas correspondientes a las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$ indicando el vértice y los interceptos con los ejes coordenados.

17. Determine el dominio de las siguientes funciones algebraicas:

a) $F(x) = 5x - 7$

b) $F(x) = -x^2$

c) $F(x) = x^2 + \sqrt{x}$

d) $F(x) = \dfrac{2}{x-2}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

f) $F(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$

18. Considere las funciones $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para determinar,

a) Los $x \in IR$ tal que $f(x) = 2$

b) Los $x \in IR$ tal que $g(x) = 1$

c) Si 2 está en el recorrido de f

d) Si -7 está en el recorrido de g

e) Si -1 está en el recorrido de h

f) El recorrido de g

g) El recorrido de h

19. Determine el dominio de las funciones:

a) $F(x) = \sqrt{x-3}$

b) $F(x) = \sqrt{x^2+9}$

c) $F(x) = \sqrt{4-x^2}$

d) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

e) $F(x) = \sqrt{3 - |x|}$

f) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

g) $F(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-2}$

20. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $G(x) = e^{2x}$

b) $G(x) = \dfrac{1}{e^{x+1}}$

c) $G(x) = 3^{-x}$

d) $G(x) = \dfrac{1}{2^x - 8}$

e) $G(x) = \ln(3x - 1)$

f) $G(x) = \ln(x^2)$

g) $G(x) = \log_3(x+5)$

h) $G(x) = \sqrt{x} + \ln(x+3)$

21. Considere las funciones f: $[-6, 10] \to IR$, $f(x) = x + 5$; g : $]-\infty,3] \to IR$, $\sqrt{1-x}$. Determine el Rec(f) y Rec(g).

22. Si f y g son las funciones definidas por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$, determine $f(x - 2)$ y $g(\dfrac{1}{x})$.

23. Dadas las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = 2x-3$,

a) Encuentre $(f \circ g)(4)$, $(f \circ f)(0)$ y $(g \circ f)(2)$.

b) ¿Existe algún $x \in IR$ tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

24. Grafique y determine el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x > 0 \\ 3 - x^2 & si \quad x \le 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x & si \quad |x| \le 1 \\ \dfrac{|x|}{x} & si \quad |x| > 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & si \quad x > 0 \\ \sqrt{-x} & si \quad x \le 0 \end{cases}$$

25. Sean f y g funciones reales tales que $(f \circ g)(x) = 12x^2 - 28x + 17$. Si $f(x) = 2x - 3$, determine la función g.

26. Para las funciones f y g dadas encuentre $f \circ g$.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & si \quad x > -1 \\ x^2 - 4 & si \quad x \le -1 \end{cases}$, $g(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & si \quad x \ge 0 \\ (x+2)^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & si \quad x > 1 \\ x^3 & si \quad x \le 1 \end{cases}$, $g(x) = \sqrt{x}$

27. En cada caso, determine si la función f dada es par, impar o ni para ni impar.

a) $f(x) = x^2 + x$

b) $f(x) = x^3 - x$

c) $f(x) = x^4 - x^2$

d) $f(x) = log\dfrac{1-x}{1+x}$

28. Demuestre que toda función "lineal" f(x) = ax + b es biyectiva y que su inversa f^{-1} también es una función "lineal".

29. Determine si las siguientes funciones son inyectivas.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x^3 + 1$

c) $f(x) = |x-3|$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ -(x+3) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

30. Para cada una de las funciones f dadas, determine el dominio D y el conjunto B de modo que f de D en B sea biyectiva. Además encuentre la función inversa f^{-1}.

a) $f(x) = 5x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 3$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

31. Cierta institución de beneficencia ha hecho un balance del dinero que se gasta y del dinero que ingresa mensualmente concluyendo que por cada peso gastado se obtiene $1,25 de ingreso. Escriba el ingreso I(x) como función de la cantidad x que se gasta. Si el mes pasado se gastó $1.850.000, ¿cuál fue el ingreso de ese mes?. Si en cierto mes el ingreso fue $2.120.000, ¿cuánto se gastó ese mes?

32. Se sabe que al comprar una cámara fotográfica en $135.000 su valor decrecerá en $9350 cada año. Escriba una función D(t) que represente el valor de la cámara fotográfica como función del número de años t, después de su adquisición. Si el valor actual de la cámara fotográfica es de $88.250, ¿cuántos años han pasado desde que se adquirió?

33. La función de costo de una empresa está dada por C(q) = 7q + 35 miles de pesos, donde q es el número de artículos a producir. ¿Cuál es el costo fijo y el costo variable de la empresa? ¿Qué significado tiene la pendiente m = 7?

34. Una impresora tiene un valor original de $100.000 y se deprecia en forma lineal durante cinco años con un valor de desecho de $30.000. Determine una función lineal que proporcione el valor contable al tiempo t. (en años) ¿Cuál será el valor contable de la impresora después de 2 años?

35. Una fábrica de calendarios tiene costos fijos por $20.000, costos de producción de $20 por unidad y vende cada artículo a $30. Determine las funciones de costos, ingresos y utilidades de la fábrica.

36. Las ganancias trimestrales, en miles de dólares de cierta empresa están dadas por la función $U(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30, \; 0 \leq x \leq 50$, donde x, en miles de dólares es la cantidad de dinero que se gasta en publicidad cada trimestre. Determine la cantidad que se debería invertir en publicidad para obtener una ganancia trimestral máxima. ¿Cuál es la máxima utilidad que se lograría?

37. Cierta empresa tiene como función de costo C(q) = 24 + 3q y como función de ingreso R(q) = 5q. Determine la función de utilidad U(q) y encuentre el "punto de equilibrio" (que es el valor q para el cual U(q) = 0). Grafique las funciones C, R y U.

38. Muestre que la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

39. El organismo elimina cierto medicamento de acuerdo con la función exponencial $f(t) = P_o(0{,}5)^t$, donde t se mide en horas. Si después de 2 horas quedan 100 mg de medicamento en el cuerpo, ¿qué cantidad de medicamento había inicialmente?. ¿Qué cantidad de medicamento hay en el organismo después de 3 horas?

40. Un estudio de productividad del turno matinal de una fábrica (8:00 a 12:00) indica que el ritmo de producción de un trabajador medio que inicia sus actividades puntualmente es una función del tiempo modelada por la función $P(t) = -3t^2 + 18t + 12$. Determine el momento de la mañana en que el trabajador opera más eficientemente.

Respuestas

1.	IV, I, II, IV y III	3.	$-\frac{1}{3}$, 1, 2
5.	$\frac{3}{7}$; Sí, no, no, si; y =3x-4, y =-3x+2, y =2x-10, y = -x-3, y =1.	7.	x + 2y – 8 = 0
9.	$\frac{13}{2}$, 0, -6, $-\frac{3}{2}$, -3	10.	Sí, no, sí, sí, sí, no.
11.	-4, 24, -8	12.	1, 21, $a^2 + a + 1$
13.	8, 2, 16.	15.	2, no existe, 7.
17.	IR, IR, IR_0^+, IR-{2}, IR, IR-{1}	19.	$[3, -\infty[$, IR, [-2, 2], IR - [-1, 2], [-3, 3], IR – {0}, $[2, +\infty[$
21.	[-1, 15], $[2, +\infty[$	23.	a) 41, 5, 19 b) Sí, $3 \pm \sqrt{8}$
25.	$g(x) = 6x^2 - 14x + 10$	27.	Ni par ni impar, impar, par, impar.
29.	No, sí, no, no.	31.	I(x) = 1,25x \$2.312.500 \$1.696.000
32.	D(t) = 135.000 – 9.350x 5 años.	33.	Costo fijo \$35 mil, Costo variable, 7 por unidad.
34.	F(x) = 100 - 14x, \$72.000	35.	C(x) = 20x + 20.000, I(x) = 30x, U(x) = 10x - 20.000
36.	US\$10.500 y US\$66.750	37.	U(q) = 2q -24. Pto equilibrio para q=12
39.	400 mg., 50 mg.	40.	Después de 3 horas, es decir a las 11:00.