GUIA DE EJERCICIOS FUNCIONES

1.- Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 - 6$. **Sol**: IR.

b) $f(t) = \dfrac{4-t^2}{2t^2 - 7t - 4}$. **Sol:** $IR - \left\{4, -\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $g(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$. **Sol:** IR

d) $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. **Sol:** $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

e) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$. **Sol:** $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2.- Determine los valores de las imágenes correspondiente para cada función:

a) $h(s) = s^2 - 3$ $\quad h(4)\ ;\ h(-1)\ ;\ h(-2x)$

b) $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$ $\quad h(1)\ ;\ h\left(\dfrac{1}{16}\right)\ ;\ h(1-x)$

c) $g(x) = \dfrac{x-5}{x^2+4}$ $\quad g(-2)\ ;\ g(1)\ ;\ g(x+h)$

Sol: a) $h(4) = 13; h(-1) = -2; h(-2x) = 4x^2 - 3$

b) $h(1) = 1; h\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}; h(1-x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

c) $g(-2) = -\frac{7}{8}; g(1) = -\frac{4}{5}; g(x+h) = \frac{x+h-5}{(x+h)^2+4}$

3.- Sea $h : IR \to IR$, donde $h(x+1) = x^2 + 3x + 2$. Determine $h(x)$.

Sol: $h(x) = x^2 + x$.

4.- Considere las funciones $f(x) = 9x + 7$ y $g(x) = x^2 - x$, determine:

a) $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$. **Sol**: 9

b) $\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}$. **Sol**: $x+3$

c) $f(g(x))-g(f(x))$. **Sol:** $-72x^2-144x-56$

5.- Suponga que $f(b)=ab^2+a^2b$, calcule $f(a)$ y $f(a\cdot b)$.

Sol: $f(a)=2a^3;\qquad f(a\cdot b)=a^3b(b+1)$

6.- Determinar funciones *f y g*, tales que $h(x)=f(g(x))$ para cada uno de los siguientes casos:

a) $h(x)=(4x-3)^5$. **Sol**: $f(x)=x^5; g(x)=4x-3$

b) $h(x)=\sqrt{x^2-2}$. **Sol**: $f(x)=\sqrt{x}; g(x)=x^2-2$

c) $h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. **Sol**: $f(x)=\dfrac{1}{x}; g(x)=x^2-1$

d) $h(x)=(3x^3-2x)^3-(3x^3-2x)^2+7$.

Sol: $f(x)=x^3-x^2+7; g(x)=3x^3-2x$

e) $h(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+2}$. **Sol**: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}; g(x)=x+1$.

7.- Grafique las siguientes funciones determinando dominio, recorrido e intersección con los ejes.

a) $f(p)=4-p^2$. **Sol**: Dom: IR; Rec: $]-\infty,4]$

b) $h(x)=x^2+2x+6$. **Sol**: Dom: IR; Rec: $[5,+\infty[$.

c) $f(r)=\dfrac{16}{r^2}$. **Sol**: Dom: $IR-\{0\}$; Rec: IR^+

d) $h(u)=|u-3|$. **Sol**: Dom: IR; Rec: $IR^+\cup\{0\}$.

e) $g(x)=|x^2-4|$. **Sol**: Dom: IR; Rec: $IR^+\cup\{0\}$

f) $f(x)=(x-4)^2+1$. **Sol**: Dom: IR; Rec: $[1,+\infty[$

8.- Grafique las siguientes funciones definidas por ramas:

a) $f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad 0\le x\le 4 \\ 3x & si \quad x>4 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad -1\le x<2 \\ 9-x^2 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad 0\le x<3 \\ 4 & si \quad 3\le x\le 5 \\ x-1 & si \quad x>5 \end{cases}$

9.- Sea $f: A\subseteq IR \to B\subseteq IR$,donde $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$. Determine los conjuntos A y B de modo que f sea una función biyectiva. Encuentre su función inversa.

Sol: $A=IR-\{5\}; B=IR-\{2\}$.

10.- Considere la función $f: IR \to IR$ tal que:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+7 & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad -1<x<0 \\ x+9 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2, f(2))$ y que tiene pendiente “3”.

b) Encuentre $f(f(-2))$

Sol: a) $y=3x+5$ b) 20

11.- Sea $f: A\subseteq IR \to B\subseteq IR$, una función definida por $f(x)=3x^2-5x+9$.

a) Grafique la función f.

b) Determine a través del gráfico de f, A y B, de modo que f sea una función biyectiva.

Sol: b) $A=\left]-\infty,\frac{5}{6}\right]; B=\left[\frac{83}{12},+\infty\right[$

12.- Sea $y=\dfrac{(a-1)x-1}{ax+2}$. Determine el valor de $a\in IR$ tal que la imagen de “1” es “1/5”.

Sol: $a=2$.

13.- Escriba la expresión como un solo logaritmo:

a) $2\log_5 16+3\log_5 4-4\log_5 36+2\log_5 9$. **Sol**: $\log_5\left(\dfrac{64}{81}\right)$

b) $\ln(x^2+y^2)-\ln 2x-\ln 3y+\ln 6$. **Sol**: $\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)$

14.- Grafique en el mismo sistema de coordenadas:

a) $y=\log_3 x$ e $y=3^x$

b) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ e $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

15.- Considere las siguientes relaciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 0 \\ -2x+2 & x<0 \end{cases} \qquad g(x)=x-5$$

a) Grafique $f(x)$ y encuentre los intervalos donde f sea positiva.

b) Se define $h(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}}$. Determine Dom $(hog)(x)$ para que sea una función.

Sol: a) f es positiva en todo IR b) Dom: $[3,4[\cup]6,+\infty[$

16.- Dada la función

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-6x+8}$$

Encuentre:

a) Ceros de la función
b) Dominio de la función
c) Asíntotas
d) Gráfico de la función

Sol: a) $x=3\vee x=-3$ b) Dom: $IR-\{4,2\}$ c) Vert: $x=2\wedge x=4$, hor: $y=1$

17.- Aplicaciones

1.- El nivel de producción de un producto está en función de su venta. Consideremos la función nivel de producción $\boldsymbol{f(v)=5+1{,}1v}$ donde "v" es el número de unidades vendidas del producto

a) Encuentre el nivel de producción para una venta de: 20 unidades y 100 unidades
b) Grafique la función y determine que sucede cuando las ventas aumentan
c) Exprese las ventas en función del nivel de producción.

Sol: a) 27 y 115 c) $v(y)=\dfrac{y-5}{1.1}; y=f(v)$

2.- Después de observar una fotocopiadora automática de trabajo continuo, el técnico descubre que por un defecto de funcionamiento, la producción disminuirá en un número constante de hojas impresas por hora, arrojando 4480 hojas impresas durante la primera hora con desperfectos. Si la hora 30 con desperfecto produjo 3900 hojas.

a) Determine un modelo lineal que sea capaz de predecir la cantidad de hojas arrojadas por la fotocopiadora con defecto, "N", en función de la cantidad de horas "t".
b) ¿Después de cuántas horas la cantidad de hojas arrojadas por la fotocopiadora alcanza las 4420?

Sol: a) $N(t)=-20t+4500$ b) Después de 4 horas.

3.- Un fabricante puede producir radios a un costo de US$2 por unidad. Los radios se han vendido a US$5 cada uno, y a este precio los consumidores han comprado 4000 radios al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los radios y estima que por cada US$1 de incremento en el precio se venderán 400 radios menos cada mes.

a) Establezca una función que exprese la utilidad del fabricante en términos del número de aumentos x de US$1 cada uno.
b) Determine el precio que optimiza las utilidades y calcule dicha utilidad.

Sol: a) $U(x) = -400x^2 + 2800x + 12000$ b) $p = \$8.5; U = \$16900$

4.- Supóngase que el costo total en dólares de la fabricación de p unidades de cierto artículo está dada por la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500$

a) Calcular el costo de fabricación de 20 unidades.
b) Calcular el costo de fabricación de la vigésima unidad.

5.- Se estima que el número de horas trabajadas requeridas para distribuir nuevas guías telefónicas al x% de las familias en cierto comunidad rural está dado por la función $g(x) = \dfrac{600x}{300 - x}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función f)
b) ¿Para qué valores de x tiene f(x) una interpretación práctica en este contexto?

6.- Un fabricante puede producir radios a un costo de US$10 la unidad y estima que si se venden a x dólares cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente 80-x radios cada mes. Expresar la utilidad mensual del fabricante como una función del precio x, dibujar la gráfica de esta función y determinar el precio al cual la utilidad del fabricante será la mayor:

7.- Supóngase que el costo total de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + 2x + 5$ dólares. Expresar el costo medio por unidad como función de unidades producidas y, sobre el mismo conjunto de ejes, representarlas funciones de costo total y costo medio.(Nota: El costo medio es igual al costo total dividido entre el número de unidades producidas).

8.- Si el costo de alquilar un automóvil es US$490.00 más US$15.00 por cada día de uso:

a) Elaborar una tabla que muestre el número de días durante los que se alquila el automóvil y el costo de alquilar el vehículo por 7 días, 10 días, 14 días y x días
b) Escribir un expresión algebraica que represente el costo y como una función del número de días x.
c) Dibujar la gráfica de la expresión hallada en el literal b)
d) Emplear la gráfica para determinar el número de días, con una cifra decimal, que se alquiló el automóvil si la factura presenta un valor de US$230.00 (Antes del Impuesto)

9- El valor de cierto libro raro se duplica cada 10 años. En principio, el libro se valoró en US$3.

a) ¿Cuál es el valor del libro a los 30 años? ¿A los 40 años?
b) ¿Es lineal la relación entre el valor del libro y su edad? Responder esta pregunta mediante una gráfica apropiada.

10.- En determinada fábrica, el costo de instalación es directamente proporcional al número de máquinas utilizadas, y el costo de operación es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas. Expresar el costo total como una función del número de máquinas.

11.- Las funciones de oferta y de demanda de cierto artículo son $s(p) = 4p + 200$ y $D(p) = 3p + 480$, respectivamente. Hallar el precio de equilibrio y la cantidad correspondiente de unidades ofrecidas y demandadas, y dibujar las curvas de oferta y de demanda en el mismo conjunto de ejes.

12.- La afiliación a un club privado de tenis cuesta US$1,000 por año y da derecho al socio a utilizar los campos de juego por una cuota de US$3 por hora. En el club de la competencia, la afiliación cuesta US$800 por año y el uso de los campos cuesta US$4 por hora. Si sólo se tienen en cuenta las consideraciones financieras, ¿ Cómo debería elegir un jugador de tenis a qué club asociarse?.

13.- Maximización de ingresos El ingreso mensual R (en cientos de dólares) obtenido por la venta de rasuradoras eléctricas Royal se relaciona con el precio unitario p (en dólares) mediante la ecuación:

$$R(P) = -\frac{1}{2}P^2 + 30P$$

a) Trace la gráfica de R.
b) ¿Cuál precio unitario maximiza el ingreso mensual?

14.- Una Clínica ha decidido renovar sus ambulancias. En el presente año el costo de compra es de US$ 15.000. Las unidades se conservan tres años, una vez transcurrido este período se espera que su valor de reventa sea de US$ 3.600. Si la depresión es lineal , determine la función que describe esta devaluación.

15.- Una compañía vende un insumo médico a $100 por unidad. Los costos de las materias primas son de $40 por unidad, los de mano de obra son de $ 25 por unidad, los costos de embarque son de $ 10 por unidad y los costos fijos anuales ascienden a $100.000.

a)Determine la función de utilidad U = f(x), donde "x" denota el número de insumos vendidos.
b)¿ Cuántas unidades hay que vender a fin de obtener una utilidad anual de $150.000?
c)¿ Es posible no obtener utilidad?

16.- El valor de reventa "V" de un equipo radiográfico, se comporta de acuerdo a la ecuación $V = 750.000e^{-0.05\,t}$ donde "t" son los años transcurridos desde el momento de la compra.

a) ¿Cuál es el valor original del equipo radiográfico?
b) ¿Cuál es el valor esperado de reventa después de cinco años?
c) ¿Después de cuántos años el valor de reventa será de US$ 250.000?

17.-La función demanda de un producto es : $D(p) = p^2 - 90p + 2025$ donde "p" representa el precio del producto en pesos.

a) ¿Cuántas unidades serán demandadas si se fija el precio de US$30?
b) Determinar la intersección con el eje Y e interpretar el resultado.
c) Determinar la intersección con el eje X e interpretar los resultados.
d) Para qué precio la demanda es mínima?

18.- La tienda departamental Metro ha determinado que "t" semanas después de promover cierta venta, el volumen de ventas está dado por una función de la forma:
$S(t) = B + Ae^{-kt} \quad 0 \le t \le 4$ donde B = 50.000 y es igual al volumen promedio semanal de ventas antes de la promoción. El volumen de ventas al final de la primera y la tercera semana es de $83.515 y $65.055, respectivamente. Suponga que el volumen de ventas disminuye en forma exponencial y determine:

a) La constante "k" de decaimiento
b) El volumen de ventas al final de la cuarta semana.