CAPÍTULO 1

Números Reales, Funciones e Inecuaciones.

Estos apuntes corresponden a la preparación de clases de la sección 1. Pretenden complementar el texto guía y no lo reemplazan bajo ninguna circuntancia.

1.1. Los números reales.

En esta sección recordaremos algunas notaciones.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, es decir

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

También usremos las notaciones siguientes:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots\} \text{ para los enteros,}$$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p,\ q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\} \text{ para los racionales}$$

y denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los reales que Uds. conocen.

Los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (siempre que el denominador no sea 0) según las reglas que Uds. conocen.

Además los reales están ordenados en el sentido que dados $a, b \in \mathbb{R}$ siempre se tiene que $a < b$, $b < a$ o $b = a$.

Ejercicio. Cual número es mayor?

a) 7.5 o 5.9.
b) -3.3 o 0.9.
c) -7.5 o -5.9.

Se tiene la inclusión

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pregunta: Existe algún número real que no sea racional?

La respuesta a esta pregunta es que si y muchos. En algún sentido los números irracionales, es decir los reales que no son racionales, son muhos mas que los números racionales.

Probaremos a continuación que el número $\sqrt{2}$ NO es racional. El propósito de dar esta demostración no es tanto que Uds. sepan que $\sqrt{2}$ es irracional, para eso se los digo y Uds. lo creen, sino dar un primer ejemplo de una demostración por contradicción.

Una demostración por contradicción consiste en suponer una afirmación falsa y de esto concluir una contradicción. Esto prueba que la afirmación original es verdadera.

Teorema 1.1.1.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Demostración: Supongamos para obtener una contradicción que la afirmación $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ es falsa. Es decir supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. En este caso se puede escribir

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con p y q enteros. Podemos suponer además que p y q **no tienen factores comunes**, pues de lo contrario podemos simplificar. Por ejemplo si $p = 124$ y $q = 18$, que tienen 2 por factor común, podemos escribir

$$\frac{128}{18} = \frac{64}{9}$$

donde 64 y 9 no tienen factores comunes.

Elevando al cuadrado obtenemos

$$2q^2 = p^2.$$

De esto se deduce que 2 divide a p^2 y por lo tanto 2 **divide a** p. (Por qué?) Luego podemos escribir

$$p = 2k$$

con k entero.

Por lo tanto

$$2q^2 = 4k^2$$

o sea

$$q^2 = 2k^2.$$

De esto se deduce que 2 divide a q^2 y por lo tanto 2 **divide a** q. Como 2 también divide a p, 2 es factor común a p y a q pero p y q no tenían factores comunes. Esto es una contradicción que demuestra que la afirmación $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ es verdadera como queríams probar. $\square$

1.2. Funciones.

En esta sección repasaremos la idea y algunos conceptos básicos de funciones.

Definición 1.2.1. *Si A y B son dos conjuntos, una función $f : A \to B$ es una regla que asocia a cada elemento de A un elemento de B. A se llama el DOMINIO y lo denotamos por $Dom(f)$. El conjunto B se llama el CONJUNTO de LLEGADA.*

Ejemplo.

a) Si $A = \{$ alumnos en esta clase $\}$, $B = \{$ días de la semana $\}$,

$$f(\text{ alumno }) = \text{ día de la semana en que nació el alumno.}$$

Calcule $f(\text{Ud.})$.

b) Si $A = \{$ países en el mundo $\}$, $B = \mathbb{N}$,

$$f(\text{ país }) = \text{ año de la independencia del país.}$$

En este curso nos centraremos principalmente en funciones donde A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$. Es decir el caso de funciones reales. En lo que sigue, salvo aviso explícito, todas las funciones son reales.

Ejemplo.

a) $f(x) = x^2 + 1$. Calcule $f(2)$ y $f(-0.5)$.
b) $g(z) = \sin(z) + z^2$. Calcule $g(\pi)$, $g(\frac{\pi}{2})$.
c) $h(y) = 2y - 3$. Calcule $h(7)$, $h(-3)$.

Definimos ahora lo que es el gráfico de una función real.

Definición 1.2.2. *Si $f : A \to B$ es una función real se define su GRAFICO como*

$$\textit{gráfico de } f \;=\; \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in A\}.$$

La figura siguiente ilustra el gráfico de una función.

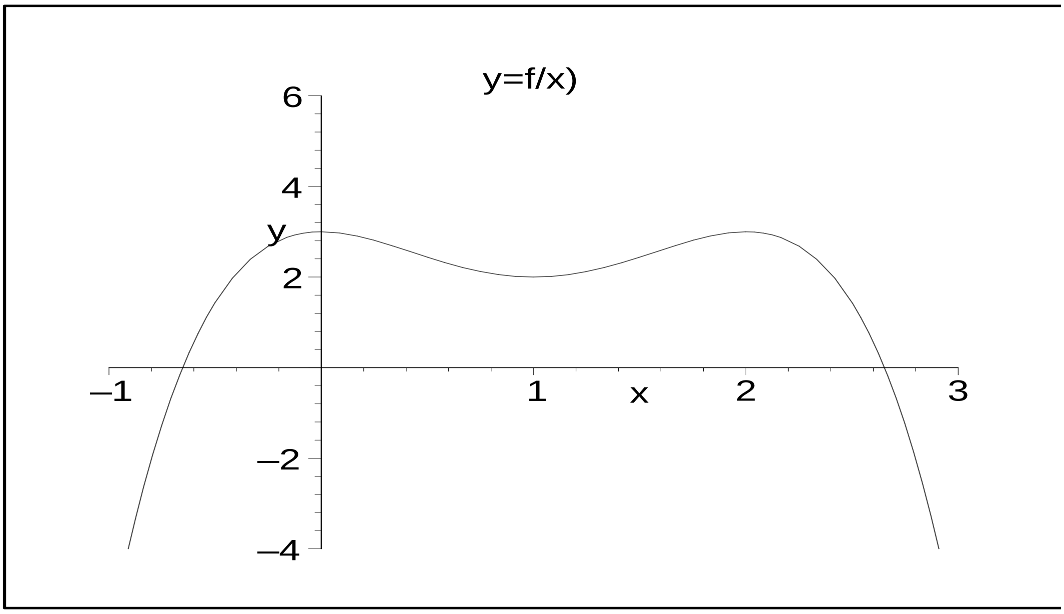

Gráfico de f.

Figura 1.

Ejercicio.

Bosquejar el gráfico de

(1) $h(x) = x$ y de $h(x) = 3x - 7$.
(2) $f(x) = x^2$ y de $g(z) = z^2 - 3$.
(3) $h(t) = t^3$ y de $g(x) = (x+2)^3$.
(4) $h(z) = \sqrt{z}$ y de $g(z) = \sqrt{z-4} + 3$.

Ejercicio.

Sea f tal que su gráfico es el de la figura 1. Dibuje el gráfico de las siguientes funciones:

a) $h(y) = 2f(y)$.
b) $w(z) = f(z) - 2$.
c) $t(x) = f(x+3)$.
d) $h(y) = f(y-7)$.
e) $A(t) = f(t-1) + 2$.
f) $h(y) = -f(y)$.
g) $h(y) = f(-y)$.

Ejercicio.

Si se conoce el gráfico de $f(x)$ dibujar el gráfico de la función $h(x) = f(x - a)$, donde a es un número fijo. (Respuesta: El gráfico de h se obtiene trasladando en a el gráfico de f. La traslación es hacia la derecha si a es positivo y hacia la izquierda si a es negativo.)

Ejercicio.

Bosquejar el gráfico de

(1) $h(x) = x$, $h(x) = 3x$ y $h(x) = 3x - 7$.
(2) $f(x) = x^2$, $g(z) = z^2 - 3$ y $h(x) = (x - 2)^2 - 3$.
(3) La función VALOR ABSOLUTO que se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Por ejemplo $|6.3| = 6.3$, $| - 12.5| = 12.5$ y $|2 - 3.7| = 1.7$.

Graficamos a continuación la función $f(x) = |x|$.

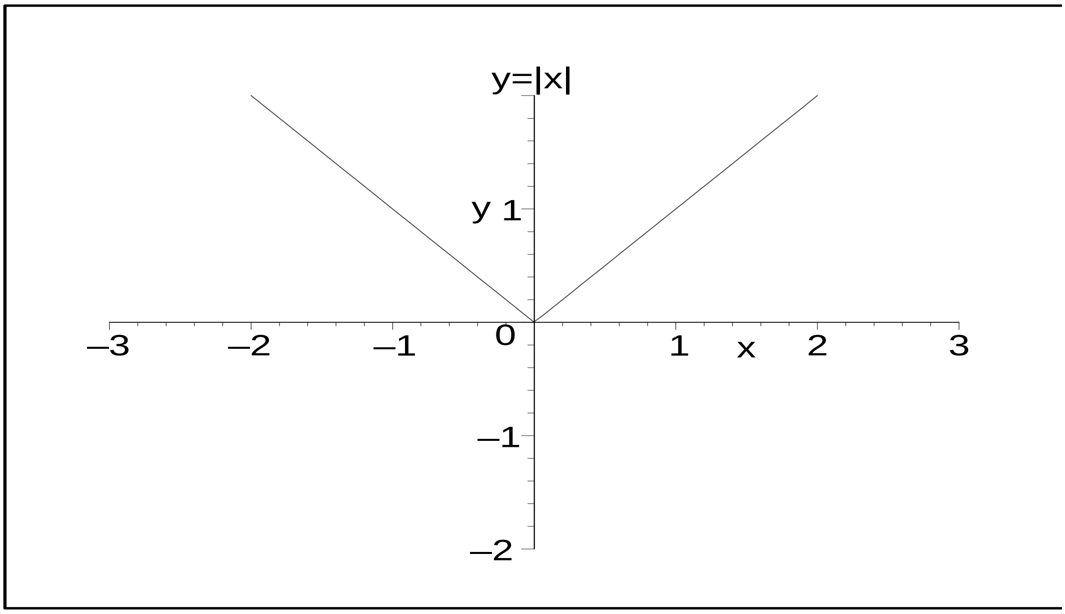

Gráfico de $f(x) = |x|$.
Figura 2.

Grafique también $p(s) = -|s|$, $l(t) = -|t - 2|$, y $f(x) = -|x - 2| + 4$.

(4) La función PARTE ENTERA que se define por

$$[x] = \text{el mayor entero que es menor o igual a } x.$$

Por ejemplo $[3.5] = 3$, $[2] = 2$, $[-7.3| = -8$.
(5) $h(x) = x - [x]$.

La parábola y la función cuadrática:

Todos conocemos el gráfico de $f(x) = x^2$, este es una parábola con vértice en el origen que se abre hacia arriba.

Si $A \neq 0$ el gráfico de $f(x) = Ax^2$ es también una parábola con vértice en el origen, más "flaca" o más "achatada " de acuerdo a si $|A| > 1$ o $|A| < 1$ respectivamente. Además, si $A > 0$ la parábola se abre hacia arriba y si $A < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

Si $B \in \mathbb{R}$ el gráfico de $f(x) = A(x - B)^2$ es la parábola anterior pero con vértice en el punto $(B, 0)$.

Finalmente si $C \in \mathbb{R}$ el gráfico de

$$f(x) = A(x - B)^2 + C$$

es la parábola anterior pero con vértice en el punto (B, C).

Podemos ahora estudiar el gráfico de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$.

Esto se logra escribiendo $f(x)$ en la forma $A(x-B)^2+C$. Es decir buscamos A, B y C tales que

$$ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C = Ax^2 - 2ABx + AB^2 + C$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Para esto, igualando coeficientes se debe tener

$$a = A,$$

$$b = -2AB$$

y

$$c = AB^2 + C.$$

Despejando para A, B y C obtenemos

$$A = a,$$

$$B = -\frac{b}{2a}$$

y

$$C = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Substituyendo obtenemos

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Así el gráfico de $f(x)$ es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$, se abre hacia abajo si $a < 0$ y tiene su vértice en el punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Estudiaremos ahora la inecuación $ax^2 + bx + c \geq 0$, es decir determinaremos los valores de x para los cuales se cumple que

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

De la discusión anterior tenemos que en el caso $a \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = \\ = \quad & a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ahora distinguimos dos casos.

Primero si el DISCRIMINANTE, $\triangle = b^2 - 4ac$, es menor que 0. Entonces la expresión entre paréntesis en (1.1) será siempre positiva y por lo tanto $ax^2 + bx + c$ tendrá siempre el signo de a.

Segundo si el DISCRIMINANTE, $\triangle = b^2 - 4ac$, es mayor o igual que 0. Entonces, factorizando la diferencia de cuadrados en suma por diferencia obtenemos

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = \\ = \quad & a(x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ son las raices de la correspondiente ecuación cuadrática.

De este modo, en este caso si x está entre las raices, $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de $-a$. En caso contrario $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de a.

Observación:

Hacemos notar que, en el caso de $ax^2 + bx + c = 0$, (1.2) nos dá la conocida fórmula para las raíces de la ecuación de segundo grado que Ud. conoce tan bien.

Ejercicio.

(1) Resolver $3x^2 - x - 3 > 0$.
(2) Resolver $-2x^2 - 3x + 1 \geq 5$.

Observación:

Consideremos la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$.

Sabemos que

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Por lo tanto si $a > 0$ entonces, de la fórmula, se ve que la función $f(x)$ alcanza un mínimo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ y el valor mínimo es $a\frac{b}{2a}^2 + b\frac{b}{2a} + c = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$.

También si $a < 0$ entonces, de la fórmula, se ve que la función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ y el valor máximo es $a\frac{b}{2a}^2 + b\frac{b}{2a} + c = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$. $\square$

Presentamos a continuación el problema más sencillo que muestra el uso del cálculo en problemas de optimización.

Ejemplo.

Supongamos que tenemos l metros de reja de alambre y queremos construir un gallinero rectangular. Que forma debe tener el gallinero para optimizar, es deir hacer lo mas grande posible, el número de gallinas que caben en el?

Solución:

Nuestro problema esencialmente se reduce a encontrar el rectángulo de área máxima que es posible encerrar con un cordel de l mts de largo.

Si hacemos un lado del rectángulo de largo x el largo del otro lado queda inmediatamente determinado y es de largo $\frac{l}{2} - x$. Por lo tanto el área del rectángulo como función del largo del lado que elegimos como x está dada por

$$A(x) = x(\frac{l}{2} - x) = -x^2 + \frac{l}{2}x.$$

Nuestro problema se reduce ahora a encontrar el valor de x que hace máximo el valor de $A(x)$.

De acuerdo a la discusión precedente el gráfico de $A(x)$ es una parábola que se abre hacia abajo, y por lo tanto su punto más alto se encuentra en el vértice. Por lo tanto $A(x)$ alcanza su valor máximo en $x = \frac{l}{4}$, es decir entre los rectángulos de perímetro l mts el de área máxima es el cuadrado. Cuál es el área del gallinero óptimo? $\square$

Ejercicio.

Graficar

(1) $2x^2 + 4x - 2$.
(2) $7x^2 - 12 + 1$.
(3) $x^2 - 2x + 1$.

Pasamos ahora a repasar otros conceptos relacionados con funciones.

DEFINICIÓN 1.2.3. *Una función $f : A \to B$ se dice:*

(1) *inyectiva o 1-1 si y sólo sí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.*

Hcemos notar que esto es lo mismo que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

(2) *sobreyectiva o sobre si y sólo sí para todo elemento del conjunto de llegada $b \in B$ existe un elemento del dominio $a \in A$, tal que $f(a) = b$..*

(3) *biyectiva si y sólo sí es 1-1 y sobre.*

Ejercicio.

(1) Probar que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^3$ es inyectiva y sobre.
Es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ inyectiva? Es sobre ?
Es la función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2$ inyectiva? Es sobre ?
Es la función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2$ inyectiva? Es sobre ?
Para que valores de $n \in N$ es la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = t^n$ inyectiva? Sobre?

(2) Probar que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

es una biyección de R en R.

Definición 1.2.4. *Una función f definida en un intervalo $[a, b|$ se dice que es*

(1) *creciente en $[a, b]$ si y sólo sí para todo $x, y \in [a, b]$ se tiene ($x < y \to f(x) \leq f(y)$).*
(2) *estrictamente creciente en $[a, b]$ si y sólo sí para todo $x, y \in [a, b]$ se tiene ($x < y \to f(x) < f(y)$).*
(3) *decreciente en $[a, b]$ si y sólo sí para todo $x, y \in [a, b]$ se tiene ($x < y \to f(x) \geq f(y)$).*
(4) *estrictamente decreciente en $[a, b]$ si y sólo sí para todo $x, y \in [a, b]$ se tiene ($x < y \to f(x) > f(y)$).*

Pregunta:

Cómo se vé el gráfico de una función creciente? De una decreciente?

Ejercicio.

Determinar en que intervalos son crecientes o decrecientes, y demostrarlo, las siguientes funciones:

(1) $f(y) = 3y - 2$.
(2) $f(x) = -x^2$.
(3) $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
(4) $h(x) = x - |x|$.
(5) $f(x) = [x] - x$.
(6) La función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \\ 32 - x^2 & \text{si} \quad 4 < x \end{cases}$$

Ejercicio.

Probar que si $f(x)$ es una función creciente, entonces la función $h(x) = -f(x)$ es decreciente.

Si f y g son funciones reales defindas en $\mathrm{Dom}(f)$ y $\mathrm{Dom}(g)$ respectivamente definimos las funciones suma, producto y cuociente por:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

respectivamente. Es claro que los dominios naturales correspondientes son:

- $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.
- $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.
- $\mathrm{Dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \ / \ g(x) \neq 0\}$.

Ejercicio.

Verdadero o falso. Demuestre si es cierto o de un ejemplo para demostrar que es falso.

(1) Si f es creciente y g es creciente, entonces $f+g$ es creciente.
(2) Si f es decreciente y g es creciente, entonces $f-g$ es decreciente.
(3) Si f es creciente y g es creciente, entonces $f \cdot g$ es creciente.
(4) Si f es creciente y g es decreciente, entonces $\frac{f}{g}$ es creciente.

Definición 1.2.5. *Si $f : A \to B$ se define el RANGO de f como el conjunto*

$$Ran(f) = \{f(a) \in B / a \in A\}.$$

Observación:

Otra manera de decir que $f : A \to B$ es SOBRE es decir que $\mathrm{Ran}(f) = B$.

Ejercicio.

Encontrar el rango de $f(x) = x - [x]$ y de $g(t) = t - |t|$.

Definición 1.2.6. *Sean f y g dos funciones tales que $Ran(f) \subset Dom(g)$.*

Se define la composición de g con f como la función

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Si f tiene dominio $\mathrm{Dom}(f)$ y g tiene dominio $\mathrm{Dom}(g)$, entonces $g \circ f$ está definida en

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \ / \ f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\ \}.$$

Ejercicio.

Sean
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$
y
$$g(x) = 2x + 1$$

a) Encuentre el dominio natural de $g \circ f$ y calcule $g \circ f$.
b) Encuentre el dominio natural de $f \circ g$ y calcule $f \circ g$.

Ejercicio.

Sean
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \\ 32 - x^2 & \text{si} \quad 4 < x \end{cases}$$
y
$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

a) Calcule $g \circ f$.
b) Calcule $f \circ g$.

Dese algunas funciones y haga la composición.

Definición 1.2.7. *La función $I(x) = x$ se denomina la función IDENTIDAD.*

Pasamos ahora a hablar de funciones inversas.

Definición 1.2.8. *Sea $f : A \to B$ una biyección. Se define en este caso la FUNCION INVERSA de f como la función $f^{-1} : B \to A$ definida por*
$$f^{-1}(b) = a \text{ si y sólo sí } b = f(a).$$

Observación:

La definición precedente tiene sentido ya que, dado $b \in B$, por ser f sobre, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además, por ser f inyectiva, tal a es único y f^{-1} queda bien definida.

Ejercicio.

Compruebe que las funciones siguientes son biyecciones entre los conjuntos que se indican y encuentre sus inversas. Además grafique la función y su inversa.

(1) $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3$.
(2) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$.
(3) $f : (-\infty, 0) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$.
(4) $f : [1, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Ejercicio.

Dado el gráfico de f deducir el gráfico de f^{-1}.

Pregunta:

Es posible encontrar la inversa de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1 + t^2$?

Ejercicio.

Encontrar la inversa de $f : R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio.

Denotamos por I la función identidad, es decir la función $I(x) = x$.

Probar que si f es invertible, entonces $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

DEFINICIÓN 1.2.9. *Una función f se dice*

(1) *par si y sólo sí $f(-x) = f(x)$.*
(2) *impar si y sólo sí $f(-x) = -f(x)$.*

Ejercicio.

Decidir la paridad o imparidad de las siguientes funciones:

(1) $f(t) = t^4 - t^2 - 1$.
(2) $h(x) = \frac{x^3}{x^4+4}$.
(3) $g(y) = y^5 - y^3$.
(4) $f(x) = x^4 + x^2 + 7$.

Ejercicio.

(1) Cómo se vé el gráfico de una función par? (Respuesta: Simétrico con respecto al eje OY.)
(2) Cómo se vé el gráfico de una función impar? (Respuesta: Simétrico con respecto al origen.)

DEFINICIÓN 1.2.10. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice periódica si existe un número p tal que*

$$f(x + p) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

El número p se llama un período de la función f.

Ejemplo.

a) La función $f(x) = \sin(x)$ es periódica con período 2π.
b) La función parte entera $f(x) = [x]$ es periódica con período 1.
c) Que período tiene la función $h(z) = \tan(z)$?

Ejercicio. Se sabe que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es es periódica con período 2 y que

$$g(x) = 1 - x^2 \text{ para todo } x \in [-1, 1].$$

Dibujar el gráfico de g.

Ejercicio. Verdadero o falso: La suma de dos funciones periódicas es periódica.

Ejercicio.

Hacer ejercicios varios de la guía y de los libros, especialmente del texto guía.

1.3. Inecuaciones.

En esta sección hay poco que decir salvo dar un par de reglas y algunos ejercicios.

Ejercicio.

Resolver la inecuación $|y - 2| < 7$.

Solución:

Por resolver la inecuación entendemos encontrar todos los números reales tales que substituidos en lugar de la incógnita, en este caso y, hacen la expresión verdadera.

Debemos distinguir dos casos.

Caso a: Si $y \geq 2$. Entonces $|y-2| = y-2$, por lo tanto, en este caso la inecuación se vé $y-2 < 7$, o sea $y < 9$. Pero recordando que tenemos la hipótesis $y \geq 2$ obtenemos en este caso las soluciones $y \in [2, 9)$.

Caso b: Si $y \leq 2$. Entonces $|y - 2| = -(y - 2)$, por lo tanto, en este caso la inecuación se vé $-y + 2 < 7$, o sea $y > -5$. Pero recordando que tenemos la hipótesis $y \leq 2$ obtenemos en este caso las soluciones $y \in (-5, 2]$.

Por lo tanto la respuesta final es $y \in (-5, 2] \cup [2, 7) = (-5, 7)$.

Observación:

En general $\{x \in R / |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$. Esto se interpreta geométricamente en la recta numérica como que el conjunto de los puntos que estan a una distancia de a menor que r es el intervalo abierto de centro a y radio r.

Ejercicio.

Resolver

a) $|x-6| - |x+3| \leq 1$.
b) $|x-5| \geq \sqrt{x+1}$.

Ejemplo.

Hacemos nuevamente el estudio de la inecuación $ax^2 + bx + c \geq 0$ usando ahora el método de completación de cuadrados que Ud. seguramente ya conoce.

En el caso $a \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = \\ = \; & a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = \\ = \; & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ = \; & a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ahora distinguimos dos casos.

Primero si el DISCRIMINANTE, $\triangle = b^2 - 4ac$, es menor que 0. Entonces la expresión entre paréntesis en (1.1) será siempre positiva y por lo tanto $ax^2 + bx + c$ tendrá siempre el signo de a.

Segundo si el DISCRIMINANTE, $\triangle = b^2 - 4ac$, es mayor o igual que 0. Entonces, factorizando la diferencia de cuadrados en suma por diferencia obtenemos

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = \\ = \; & a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ son las raices de la correspondiente ecuación cuadrática.

De este modo, en este caso si x está entre las raices, $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de $-a$. En caso contrario $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de a.

Ejercicio.

(1) Resolver $3x^2 - x - 3 > 0$.
(2) Resolver $-2x^2 - 3x + 1 \geq 5$.

Continuamos ahora con mas inecuaciones. El tratar con ciertas desigualdades es totalmente elemental, sólo basta trabajar bien con el álgebra y tener claras ciertas reglas elementales. Damos a continuación un par de estas reglas y observamos que tienen variaciones con desigualdades estrictas o cuando se multiplica por 0. Estas últimas las dejamos a su sentido común.

Observación:

(1) Si a una desigualdad, $p \leq q$, se le suma a ambos lados un número real c, ya sea positivo o negativo, la desigualdad se mantiene, es decir $p + c \leq q + c$.
(2) Si una desigualdad, $p \leq q$, se multiplica a ambos lados un número real r, POSITIVO , la desigualdad se mantiene, es decir $p \cdot r \leq q \cdot r$.
(3) Si una desigualdad, $p \leq q$, se multiplica a ambos lados un número real r, NEGATIVO , la desigualdad se revierte, es decir $p \cdot r \geq q \cdot r$.

Observación:

En vista de las dos últimas reglas, cuando se trabaja con desigualdades conviene evitar multiplicar a ambos lados, o lo que es lo mismo multiplicar cruzado. Si es estrictamente necesario hacerlo Ud. debe distinguir casos según el signo de por lo que esté multiplicando.

Ejemplo.

Resolver $\frac{x^2-3x+3}{x^2+x-2} \leq 1$.

Solución:

Restando 1 a ambos lados se obtiene

$$\frac{-4x+5}{x^2+x-2} \leq 0.$$

El signo del cuociente es el producto de los signos del numerador y del denominador, luego conviene hacer la siguiente tabla para estudiarlos.

x	....	-2	......	1	.....	$\frac{5}{4}$	....
$-4x+5$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}$	$+$	$?$	$-$	$?$	$+$	0	$-$

Por lo tanto la respuesta es $x \in (-2, 1) \cup (\frac{5}{4}, +\infty)$. Hacemos notar que en los puntos $x = -2$ y $x = 1$ el cuociente queda indeterminado.

Ejercicio.

Resolver

a) $\frac{x^2-x+1}{x+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{x^2-3x+2}$.
b) $\sqrt{x-6} < \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}$.
c) $|x-3| \leq \sqrt{x^2-2x-3}$.

d) Haga ejercicios de la guía o de algún texto .