EJERCICIOS

I. Definición y análisis

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en el punto $x = 0$?

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$; $f(0) = 1$

b) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ para $x \neq 0$; $f(0) = 0$

c) $f(x) = \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$ para $x \neq 0$; $f(0) = 1$

d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$ para $x \neq 0$; $f(0) = 1$

e) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{|x|}$ para $x \neq 0$; $f(0) = 1$

2. ¿Para cuál valor de x las siguientes funciones son continuas?

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

e) $f(x) = \tan x$

f) $f(x) = \cot x$

g) $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$

h) $f(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}$

i) $f(x) = \sqrt{x-1}$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

3. ¿Es la siguiente una función continua?

$$f(x) = \begin{cases} -2x-6 & \text{para } x < -3 \\ 0 & \text{para } -3 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{para } 0 \leq x < 3 \\ -x^2+10x-12 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

4. Calcule el valor de a de tal manera que las siguientes funciones sean continuas en el punto $x_0 = 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ a & \text{para } x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ a & \text{para } x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ a & \text{para } x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ a & \text{para } x = 1 \end{cases}$

5. Establezca si las siguientes funciones son continuas en el punto $x_0 = 2$.

a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{para } x \neq 2 \\ 12 & \text{para } x = 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{para } x < 2 \\ x^2+2 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

6. La función dada no está definida para cierto punto. ¿Cómo se podría definir para que sea continua en ese punto?

a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

c) $f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x+1}$

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leq 0 \\ ax+b & \text{para } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine a y b, de modo que $f(x)$ sea continua en toda su extensión.

8. Una función está dada por las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{para} \quad x \neq 2 \\ a & \text{para} \quad x = 2 \end{cases}$$

¿Cómo debe elegirse el valor a, para que la función $f(x)$ sea continua cuando $x = 2$?

9. La función $f(x)$ es indeterminada en el punto $x = 0$. Determine $f(0)$ de tal forma que $f(x)$ sea continua en este punto:

a) $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x} \quad n \in \aleph$

b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

d) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{x}$

e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

10. Averiguar si son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$

f) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

g) $f(x) = (1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

i) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

j) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$

k) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ x & \text{para} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{para} \quad 1 \leq x < 3 \\ 4-x & \text{para} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

11. ¿Son continuas las siguientes funciones?

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x \leq 3 \\ 2x+1 & \text{para} \quad x > 3 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{para} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5} & \text{para} \quad x \neq 5 \\ -10 & \text{para} \quad x = 5 \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{para} \quad x < 0 \\ a+x & \text{para} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cómo se debe elegir el número a para que la función $f(x)$ sea continua?

13. La función $f(x) = \arctan\frac{1}{x-2}$ no está definida para $x = 2$. ¿Puede elegirse el valor de $f(2)$, de tal forma que la función sea continua cuando $x = 2$?

14. La función $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ está definida para todos los valores de x, a excepción de $x = 0$. ¿Qué valor debe asignarse a la función $f(x)$ en el punto $x = 0$, para que sea continua en $x = 0$?

15. ¿Para cuál valor de m las siguientes funciones son continuas?

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{para} \quad x \neq 3 \\ m & \text{para} \quad x = 3 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} 1 - x\cos\frac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ m & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

16. ¿Para cuáles valores de a y b las funciones siguientes son continuas?

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+2}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ b & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\operatorname{sen} a & \text{para } x = -2 \\ \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & \text{para } x \in \Re \setminus \{-2;2\} \\ \frac{1}{2}\ln^2 b - \frac{1}{3}\ln b & \text{para } x = 2 \end{cases}$$

II. Clasificación de puntos de discontinuidad

1. ¿En cuáles puntos, si los hay, son discontinuas las siguientes funciones?

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-6}$

b) $f(x) = |x^2 - 2x + 5|$

c) $f(x) = \frac{2x+7}{\sqrt{x+5}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < 0 \\ x^2 & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{para } x > 1 \end{cases}$

2. Hallar los puntos de discontinuidad y estudiar el carácter de estos puntos:

a) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$

b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$

d) $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

e) $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$

g) $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$

h) $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$

i) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

j) $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

3. Estudie la continuidad de las siguientes funciones y establezca el carácter de los puntos de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{para } 1 < x \le 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } |x| \le 1 \\ 1 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{para } |x| \le 1 \\ |x-1| & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Tarifa telefónica

Suponga que una tarifa de larga distancia para una llamada desde Torreón, Coahuila, hasta Villahermosa, Tabasco, es de \$0.29 por el primer minuto y de \$0.20 por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos, esboce la gráfica de f para $0 < t \le 4\frac{1}{2}$.

Utilice su gráfica, donde $0 < t \le 4\frac{1}{2}$, para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades.

2. Inventario

Esboce la gráfica de:

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{para } 0 \le x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{para } 5 \le x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{para } 10 \le x < 15 \end{cases}$$

Una función continua como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el instante x. ¿Es f continua en 2?, ¿en 5? y ¿en 10?

3. En un lote de estacionamiento se cobra 3 pesos por la primera hora (o fracción de hora) y 2 pesos por cada hora o fracción de hora subsiguiente, hasta un máximo diario de 10 pesos.

a) Grafique el costo de estacionar un automóvil en este lote, como función del tiempo que permanezca allí.

b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estaciona su automóvil en el lote.