Límites y Continuidad de Funciones Reales

INTRODUCCIÓN

Consideremos la función f (x) = x + 2 y determinemos los **valores cercanos al valor a = 3**, para lo cual construyamos las siguientes tablas,

A

x	f (x) = x + 2
2	4
2.2	4.2
2.5	4.5
2.8	4.8
2.9	4.9
2.99	4.99

B

x	f (x) = x + 2
4	6
3.99	5.99
3.9	5.9
3.8	5.8
3.5	5.5
3.2	5.2

Notemos que en la tabla A, nos estamos aproximando al Nº 3 tomando valores menores que 3 y en la tabla B, nos acercamos a 3 por valores mayores que 3; pero en ambos casos los resultados (valores de *f (x)*) se aproximan al número real 5.

Se suele denotar en forma abreviada:

$x \to 3^-$: x se acerca a 3 por la izquierda (con valores menores que 3) mejor aún, escribiremos $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

$x \to 3^+$: x se acerca a 3 por la derecha (con valores mayores que 3) , vale decir $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.

$f\,(x) = x + 2 \to 5$: $f\,(x)$ se aproxima a 5.

Se puede decir entonces que la función real $f\ (x) = x + 2$ tiene limite 5 cuando x "tiende" al número 3 y se denota $\lim\limits_{x\to 3}(x+2)=5$.

Como usted reconoce que esta función tiene como gráfico una línea recta, analice la situación gráficamente.

Consideremos como segundo ejemplo, una función cuadrática, ella es representada por una parábola, ¿cierto?

Sea f la función definida por $f(x)=2x^2+4x-8$, construyamos nuevamente una tabla de valores, para valores "cercanos" al valor a = 4 :

A			B	
x	$f(x)=2x^2+4x-8$		x	$f(x)=2x^2+4x-8$
3.99	39.8002		5.2	66.88
2.8	18.88		5	62
2.4	13.12		4.5	50.5
2.2	9.68		4.2	44.08
2	8		4	40

En la tabla A hemos tomado valores menores que a = 4 y en la tabla B valores mayores que a= 4, ¿Le parece que podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 4^-}(2x^2+4x-8)=40 \quad y \quad \lim_{x\to 4^+}(2x^2+4x-8)=40\ ?$$

EJERCICIO:

Analice la situación gráficamente, recuerde entre otras cosas, que el vértice de una parábola cuya representación funcional es $f(x)=ax^2+bx+c$, está dado por el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

EJERCICIO:

Considere la función definida por :

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+2x, & \text{si } x<2 \\ -5x+6\ , & \text{si } 2\le x<6 \\ \dfrac{2+x}{1-x}\ , & \text{si } 6\le x \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$

Teorema. Álgebra de límites

Los límites satisfacen ciertas propiedades algebraicas, las cuales son importantes dado que simplifican el cálculo de límites de funciones. Su nombre de álgebra de límites se debe a que aparecen reiteradamente las operaciones que usted conoció al iniciar sus estudios básicos.

Sean f y g funciones reales tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces:

1.- Límite de una suma y diferencia

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

Esta propiedad del límite se extiende naturalmente al límite de una suma o diferencia de más de dos funciones.

2.- Límite de un producto

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = L_1 . L_2$$

El límite de un producto de dos funciones se extiende al límite de un producto de n funciones reales.

3.- Límite de un cuociente

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \; ; L_2 \neq 0$$

4.- Límite de una constante

Si f (x) = C, C constante real , entonces $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

5.- **Límite de una constante por una función**

$$\lim_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

Ejercicios resueltos

1.- Calcular $\lim_{x\to 3}(4x+12)$

Solución:

$\lim_{x\to 3}(4x+12)$ =4 $\bullet$ 3+12 =24 ,la evaluación directa es un número real.

2.- Calcular

$$\lim_{x\to -5}(-3x+11)^2$$

Solución:

$\lim_{x\to -5}(-3x+11)^2 = (-3\bullet(-5)+11)^2 =$ 676, otra vez se evalúo directamente.

3.-Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^3-x}$. (Notar que no se puede evaluar directamente, se obtiene $\frac{0}{0}$)

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \qquad \text{(factorización)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{3}{2} \qquad \text{(simplificación)}$$

4.- Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

Solución:

Notemos que este límite tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, al evaluar directamente, sin embargo, podemos eliminar esta forma indeterminada usando el proceso de racionalización o su inverso según la forma del limite, veamos :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}\text{(suma por difer.)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

5.- Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x^2-1}$.

Solución.-

Consideremos el cambio de variables :

$u=\sqrt[5]{2-x}$,entonces $u^5=2-x$,así $x=2-u^5$.Luego cuando $x\to 1\Leftrightarrow u\to 1$

entonces:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x^2-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{\left(2-u^5\right)^2-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{\left(2-u^5+1\right)\left(2-u^5-1\right)}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{\left(3-u^5\right)\left(1-u\right.}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{-(1-u)}{\left(3-u^5\right)(1-u)\left(1+1u+1u^2+1u^3+u^4\right)}=\frac{-1}{2\bullet 5}=\frac{-1}{10}$$

6.- Considere la sustitución: $x=y^3$; para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Solución.

Como $x=y^3$, entonces cuando $x\to 1\Leftrightarrow y\to 1$, luego :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt[3]{(y^3)^2}-2y+1}{(y^3-1)^2}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2}=\frac{1}{9}$$

7.-Calcular $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{4\sqrt[3]{x} - 12}{x - 27}$.

Solución:

Sea $\sqrt[3]{x} = a$; luego $x = a^3$ así $x \to 27 \Leftrightarrow a \to 3$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 27} \frac{4(\sqrt[3]{x} - 3)}{x - 27} = \lim_{a\to 3} \frac{4(a-3)}{a^3 - 27} =$$

$$= \lim_{a\to 3} \frac{4(a-3)}{(a-3)(a^2+3a+9)} = \frac{4}{27}$$

Límites Trigonométricos.

Usted conoció las funciones trigonométricas como un caso particular de funciones reales. Tales funciones están denominadas como seno, coseno, tangente, además cosecante, secante y cotangente ,que corresponden a los inversos multiplicativos de las tres primeras respectivamente.

Se verifica las siguientes propiedades:

$$a)\ \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \qquad b)\ \lim_{x \to a} \cos x = \cos a \qquad c)\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esta última es de gran utilidad , permite el cálculo de una gran variedad de límites trigonométricos.

EJEMPLOS.

1.- Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \right) = 0$$

2.- Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{2x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cdot \operatorname{sen}(5x)}{(5) \cdot 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \text{sen}\ (\ 5\ x\ )}{2 \cdot 5\ x}$$

$$= \frac{5}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\ (\ 5\ x\ )}{5\ x}$$

Sea u = 5 x. Si $x \to 0$ entonces $u \to 0$

$$= \frac{5}{2} \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\ (\ u\ )}{u} = \frac{5}{2}$$

3.- Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\ (\ \alpha\ x\ )}{\text{sen}\ (\ \beta\ x\ )}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\ (\ \alpha\ x\ )}{\text{sen}\ (\ \beta\ x\ )} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\alpha\ x\ \ \text{sen}\ (\alpha\ x\ )}{\alpha x}}{\dfrac{\beta\ x\ \ \text{sen}\ (\ \beta\ x\ )}{\beta\ x}}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \left[\lim_{x\to 0} \frac{sen\ (\ \alpha\ x\ )}{\alpha\ x} \div \lim_{x\to 0} \frac{sen\ (\ \beta\ x\ )}{\beta\ x} \right]$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \left[\ 1 \div 1\ \right] = \frac{\alpha}{\beta}$$

4.- Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}\ 3\ (\ x-2\ )}{x^2 - 4}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{sen\ 3(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}\ 3\ (\ x-2\ )}{(\ x-2\ )\ (\ x+2\ )}$$

Sea u = 3 (x - 2) luego $x = \dfrac{u+6}{3}$ y $x - 2 = \dfrac{u}{3}$

Si $x \to 2$ entonces $u \to 0$

$$\therefore \quad \mathop{Lim}_{x\to 2} \frac{\text{sen}\ 3\ (\ x-2\ )}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}3(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \mathop{Lim}_{u\to 0} \frac{sen\ (\ u\ )}{\left(\dfrac{u+6}{3}+2\right)\left(\dfrac{u}{3}\right)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{\left(\frac{u+12}{3}\right)\left(\frac{u}{3}\right)}$$

$$= 9 \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u(u+12)}$$

$$= 9\left(\lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u}\right) \cdot \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{u+12}\right)$$

$$= 9\cdot 1\cdot \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

5.- Calcular $\lim_{x\to a} \frac{sen(x)-sen(a)}{x-a}$

Solución:

Sea u = x - a ; si x $\to$ a entonces u $\to$ 0

$$\lim_{x\to a} \frac{\text{sen}(x)-\text{sen}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\text{sen}(u+a)-\text{sen}(a)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)\cos(a)+\text{sen}(a)\cos(u)-\text{sen}(a)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \cos(a)\frac{\text{sen}(u)}{u} + \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(a)(\cos(u)-1)}{u}$$

$$= \cos(a) \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} + \text{sen}(a) \lim_{u\to 0} \frac{-(1-\cos(u))}{u}$$

$$= \cos(a) + \text{sen}(a) \lim_{u\to 0} \frac{-(1-\cos(u))(1+\cos(u))}{u(1+\cos u)}$$

$$= \cos(a) + \text{sen}(a) \lim_{u\to 0} \frac{-\text{sen}^2(u)}{u(1+\cos(u))}$$

$$= \cos(a) - \text{sen}(a)\left(\lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u}\right)\left(\lim_{u\to 0} \text{sen}(u)\right) =$$

$$= \cos(a) - \text{sen}(a)(1)(0)\left(\frac{1}{2}\right) = \cos(a)$$

. Límites cuando la variable independiente crece indefinidamente.
(o límites al infinito)

Si bien es posible dar una definición precisa de este concepto, preferimos una explicación geométrica .Para ello consideremos la función real definida por

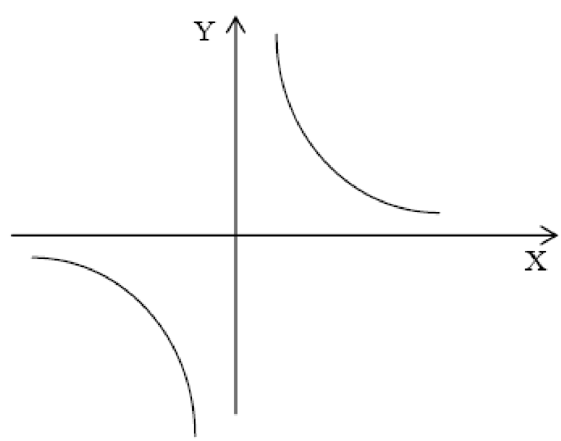
$f(x) = \dfrac{1}{x}$, usted estará de acuerdo en que su dominio es el conjunto de los números reales sin considerar el cero, vale decir $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{IR} - \{0\}$.

Construyamos una tabla de valores para la función:

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
1.000.000	0,000001
500.000	0,000002
100.000	0,00001
50	0,02
1	1
-100	-0,01
-5.000.000	- 0,0000002
0,0006	1666,666667
0.00000012	8333333,333
12	....
120432	....
-12347	....
0,00234	....
15.000.000	....

Luego de completar la tabla anterior ,usted estará de acuerdo en que :

a) la función es positiva para x > 0, vale decir el gráfico se ubica sobre el eje x.
b) la función es negativa para x < 0,con lo cual el gráfico se ubica ahora bajo dicho eje, en definitiva el gráfico es :



A partir del gráfico podemos afirmar:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

En general diremos que:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si las imágenes $y = f(x)$ se aproximan a L, cuando x crece indefinidamente (tiende al ∞)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si y sólo si las imágenes $y = f(x)$ se aproximan a L, cuando x decrece indefinidament (tiende al $-\infty$)

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (ó $-\infty$) si y sólo si las imágenes $y = f(x)$ se aproximan a ∞ (ó $-\infty$), cuando x se apro al punto a, en este caso la recta $x = a$ es asíntota vertical de la función.

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{3x+1}{x+2} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{3x+1}{x+2} = -\infty$, la recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función.

x

Observación.

De los resultados anteriores se deduce:

1) El álgebra de límites se cumple también para los límites al ∞.

2) Se verifican los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0$, si $\alpha > 0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\beta}} = +\infty$, si $\beta < 0$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-6}} = \lim_{x\to+\infty} x^6 = +\infty .$$

Otros ejemplos.

1.- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3 + x^2 - 5x^7 + 18}{3x + 10x^7 - 11x^6}$

Solución:

Cuando se trata de una división de polinomios, basta efectuar la división del numerador y denominador por una potencia de x con el mayor exponente que se presenta en el limite pedido , en el caso anterior dividamos por x^7 ,es decir :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+x^2-5x^7+18}{3x+10x^7-11x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x^7}+\frac{x^2}{x^7}-\frac{5x^7}{x^7}+\frac{18}{x^7}}{\frac{3x}{x^7}+\frac{10x^7}{x^7}-\frac{11x^6}{x^7}} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$$

2.- Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+6}-\sqrt{4x^2+10x-18}\right)$

Solución:

Parece ser una buena idea usar el proceso inverso de racionalizar, para ello trabajemos solamente con la expresión :

$$\left(\sqrt{4x^2+5x+6}-\sqrt{4x^2+10x-18}\right)\bullet\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x+6}+\sqrt{4x^2+10x-18}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x+6}+\sqrt{4x^2+10x-18}\right)}=$$

$$= \frac{4x^2+5x+6-(4x^2+10x-18)}{\left(\sqrt{4x^2+5x+6}+\sqrt{4x^2+10x-18}\right)} = \frac{-5x+24}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(4+\frac{10}{x}-\frac{18}{x^2}\right)}} =$$

$$= \frac{x\left(-5+\frac{24}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{10}{x}-\frac{18}{x^2}}\right)},$$ entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+6}-\sqrt{4x^2+10x-18}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{24}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{10}{x}-\frac{18}{x^2}}\right)} = \frac{-5}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{-5}{4}$$

Límites Especiales.

a) El número e.

Consideremos la función $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, $x \neq 0$

Para ella confeccionemos una tabla de valores :

x	$f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$
1	$2^1 = 2$
2	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$
15	$\left(\dfrac{16}{15}\right)^{15} = 2{,}632878718$
100.000	$\left(\dfrac{100.001}{100.000}\right)^{100.000} = 2{,}718268237$
1.000.000	$\left(\dfrac{1.000.001}{1.000.000}\right)^{1.000.000} = 2{,}718280469$
160.000.000	$\left(\dfrac{160.000.001}{160.000.000}\right)^{160.000.000} = 2{,}71828182$

Se puede demostrar que independientemente del crecimiento de la variable x los Valores de la función no sobrepasan de 3,vale decir :

$$f(x) < 3 \text{ , } \forall\ x \in \mathrm{IR} - \{0\}.$$

En definitiva se obtiene el siguiente límite:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \text{e} = 2{,}71828\ldots\ldots,$ este número es conocido como la base de los logaritmos naturales.

Ejemplos:

1.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+12}{4x+5}\right)^{x-2}$

Para calcular este limite que tiene la forma 1^{∞} , podemos escribirlo de una forma similar al límite anterior y luego introducir un cambio de variables:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+12}{4x+5}\right)^{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{4x+12}{4x+5}-1\right)\right)^{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{4x+5}\right)^{x-2} =$$

$$\text{considerando } \frac{7}{4\text{x}+5}=\frac{1}{y}\Rightarrow x=\frac{7y-5}{4}\ , \qquad = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\left(7y-5/4\right)-2} =$$

$$(x\to+\infty \Leftrightarrow y\to+\infty) \qquad = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{7/4}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-13/4} = \sqrt[4]{e^7}$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}+10}\right)^{\sqrt{x}}$

Procedemos similarmente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}+10}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}+10}-1\right)\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-7}{2\sqrt{x}+10}\right)^{\sqrt{x}} =$$

$$\text{Sea } \frac{-7}{2\sqrt{x}+10}=\frac{1}{y}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{-7y-10}{2} \qquad = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-7y-10/2} =$$

$$(\ x\to+\infty \Leftrightarrow y\to+\infty\ ) \qquad = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-7/2}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-5} = \frac{1}{\sqrt{e^7}}$$

. Guía de Límites

1.- $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$ R:4

2.- $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-6x^4+7)$ R: 7

3.- $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{4/h}$ R: e^2

4.- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}$ R:3/4

5.- $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+3}{5-x}$ R : no existe

6.- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ R:2

7.- $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x-5}$ R: 7

8.- $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)(x-4)}$ R:5/3

9.- $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ R: 5

10.- $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ R:1/4

11. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-2x^2+x-3)$ R: -7

12.- $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x^3)$ R:1

13. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)(1-2x)^2$ R: 18

14.- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+1}$ R:5/2

15.- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+3}{x-3}$ R: no existe

16.- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{x-3}$ R: -6

17.- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ R: 5

18.- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^2-1)}{x^2}$ R: no existe

19.- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ R: 3

20.- $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ R: 1/6

21.- $\lim\limits_{x\to 1}(1-2x^2)$ R: -1

22.- $\lim\limits_{t\to 3}(4t^2-2t+1)$ R: 31

23.- $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-3x^2+x+2)$ R: 4

24.- $\lim\limits_{x\to 0}(4x^5-20x^2+2x+1)$ R: 1

25.- $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-1)(2x+4)$ R: -4

26.- $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)(x^2-4)$ R: 0

27.- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{x^2-1}$ $R:1/2$

28.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{5x}$ $R:\frac{1}{\sqrt[3]{e^5}}$

29.- $\lim\limits_{x\to 0}(1+senx)^{1/x}$ $R:e$

30.- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2-1}}{\sqrt[3]{1-8x^3}}$ $R:\frac{-3}{2}$

31.- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{sen\frac{\pi}{6}-senx}{\frac{\pi}{6}-x}$ $R:\cos\frac{\pi}{6}$

32.- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-sen2x}{2x+3sen4x}$ $R:\frac{2}{7}$

33.- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{sen^2x}$ $R:\frac{1}{4\sqrt{2}}$

34.- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}}$ R: 4

35.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ R: 2

36.- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ R: -4

37.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x}$ R: -1

38.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-3x}{x}$ R: -3

39.- $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$ R: 0

40.- $\lim\limits_{z\to -\infty} \dfrac{\sqrt{3z^2-z}}{z}$ $R: \sqrt{3}$

41.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$ R: no existe

42.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-2}$ R:no existe

44.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$ R: -1

45.- $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^3-8}{z-2}$ R: 10

46.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ R: 1/2

47.- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ R: 4

48.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x}$ R: 1/3

49.- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{2x^2+x^3}$ R: 1

50.- $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x+12}{x+3}$ R : no existe

51.- $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ R: -7

52.- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ R : $-\dfrac{1}{5}$

53.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ R. –3

54.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h-5)^2-25}{h}$ R: -10

55.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ R: $\dfrac{3}{2}$

56.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^4-1}{h}$ R: 4

57.- $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$ R: 6

58.- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$ R : $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

59.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$ R: 32

60.- $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ R: 108

61.- $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ R: $\dfrac{1}{2}$

Límites Laterales

Cuando se deba calcular $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2}$ debemos acercarnos a 2 necesariamente con valores mayores que 2 y para $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2-x}$, los valores de x deben ser menores que 2.

Observación:

A partir de la propiedad de unicidad del límite , se deduce que la condición necesaria y suficiente para la existencia de un limite en particular ,es que existan los limites laterales y además ellos sean iguales , vale decir :

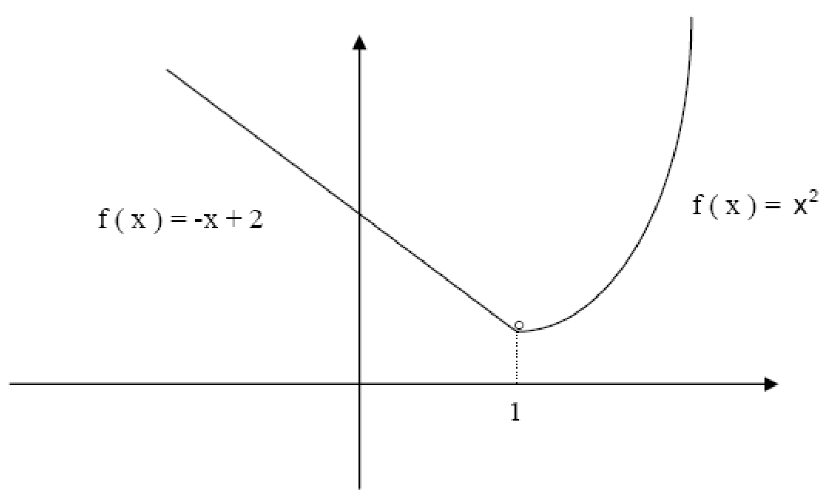
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

1.- Si $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si\ x < 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$,calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Solución:

La gráfica de la función f es



Como la función está definida de distinta forma a la izquierda y a la derecha del número real 1, es necesario determinar límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x+2) = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$, como se verifica la igualdad de limites laterales ,podemos afirmar que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

2.- Si $f(x) = \dfrac{|x-4|}{x-4}$, determine si $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe.

Como $|x-4| = \begin{cases} x-4, & si \quad x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ 4-x, & si \quad x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \end{cases}$

Entonces, $f(x) = \dfrac{x-4}{x-4} = 1$, si $x \geq 4$

y $f(x) = \dfrac{4-x}{x-4} = -\dfrac{x-4}{x-4} = -1$, si $x < 4$

Luego:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (-1) = -1 \quad , \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (1) = 1,$$

se obtiene que $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, no existe.

3.-Determine valores de A y B (si existen) de modo que para la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A(x^2-1)}{(x-1)} & , \quad si \quad x < 1 \\ 2Ax + B & , \quad si \quad 1 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{x^2-16}{x-4} & , \quad si \quad 4 < x \end{cases}$$

existan: $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Para que existan los límites anteriores debemos exigir que los limites laterales en cada uno de estos puntos sean iguales, veamos el caso para a = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{A(x^2-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{A(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2A$$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2Ax + B) = 4A + B$,entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,existe si y solo si

se verifica 2 A = 4 A+B ; procediendo similarmente con el punto a = 4 ,tenemos :

$\lim\limits_{x \to 4^-} (2Ax + B) = 8A + B$, $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{(x+4)(x-4)}{(x-4)} = 8$, entonces

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, existe si y solo si 8 A+B = 8 , en consecuencia debemos resolver el sistema de ecuaciones dado por :

$\left. \begin{array}{rl} 8A + B & = 8 \\ -2A - B & = 0 \end{array} \right|$, cuya solución es A = $\dfrac{4}{3}$ y B = $\dfrac{-8}{3}$.

Continuidad de Funciones Reales

Definición:

Sea f una función real definida en una vecindad de un punto "a" . Se dice que la función f es continua en a si y solo si

a.- Existe $f(\mathrm{a})$, vale decir $f(\mathrm{a})$ es un número real .(está definida)

b.- Existe $\lim\limits_{x \to \mathrm{a}} f(x)$ =L

c.- $\lim\limits_{x \to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$ =L

Ejemplo:

La función f (x) = x^2 + 1 es continua en a = 2, dado que

a.- Existe $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

b.- Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

c.- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5 = f(2)$

En general las funciones polinomiales de la forma $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i$ son continuas para todo $x \in$ IR.

Definición:

Una función real es continua en $A \subseteq \mathrm{IR}$ si ella es continua en todo punto del conjunto A.

Es claro que una función real deja de ser continua en un punto dado si no se verifica al menos una de las tres condiciones de la definición .

Ejemplo:

1) La función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ es discontinua en a = 2, dado que:

a) no existe f (2)

b) no existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ (es infinito)

2) La función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ es discontinua en a = 2, dado que:

a) no existe f (2) ,al evaluar se obtiene $\dfrac{0}{0}$

b) Existe el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = 4$

Observación.

Dependiendo de cual es la falla que se presenta en la definición de continuidad en un caso preciso , es que se presentan los conceptos de discontinuidad reparable e irreparable.

Discontinuidades irreparables, reparables.

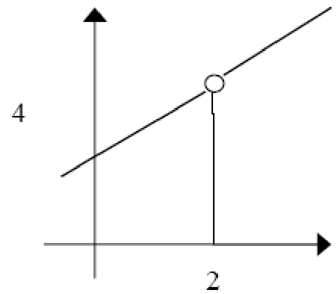
a) Cuando no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, se dice que la discontinuidad es irreparable.

b) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,y la función f no está definida en a y si lo está, no verifica la tercera condición de la definición , vale decir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,
se dice que la discontinuidad es reparable
Reparar una discontinuidad es redefinir la función de forma tal que exista $f(a)$ y se verifique la condición anterior.

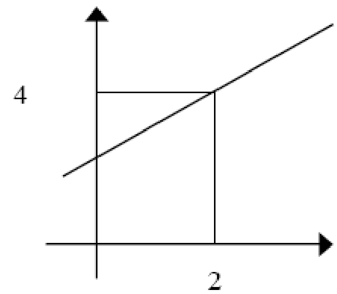
Por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, se puede reparar, redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Gráficamente la situación es:



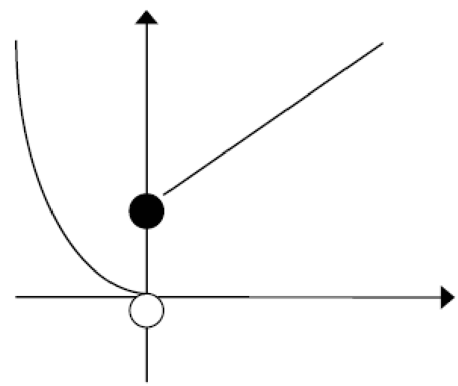
La función discontinua en a



La discontinuidad reparada

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



ii) $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

iii) $$h(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

i) Estudiaremos la continuidad de f en x = 0

1) f (0) = 1

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

$\therefore$ no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$

$\therefore$ f es discontinua en x = 0 $\Rightarrow$ f es discontinua en IR

Discontinuidad irreparable

ii) Estudiaremos la continuidad en x = 3

1.- g (3) = 4

2.- $\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(2x + 1)(x - 3)}{x - 3} = 7$

3.- $\lim_{x \to 3} g(x) \neq g(3)$ $\Rightarrow$ g es discontinua en 3 $\Rightarrow$ g es discontinua en IR

La discontinuidad de g es reparable. Se puede redefinir g, por ejemplo:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

iii) Continuidad en 0

h (0) = 3

$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + 3) = 3$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x + 3) = 3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} h(x) = 3 = h(0)$$, luego h es una función continua en 0.

Continuidad en x = 2

h (2) = 6

$$\lim_{x\to 2^+} (x^2 + 2) = 6 \qquad , \qquad \lim_{x\to 2^-} (2x + 3) = 7$$

entonces la discontinuidad es irreparable en 2 , luego la función h es discontinua en IR

Ejercicio:

Determine los valores de A y B para que la función f sea continua en IR si

$$f(x) = \begin{cases} -2\,\text{sen}(x) & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\,\text{sen}(x) + B & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución:

Si $x < -\pi/2 \Rightarrow f(x) = -2\,\text{sen}\,x$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (-2\,\text{sen}\,x) = -2\,\text{sen}\,a = f(a)$$

f continua en $\left]-\infty, -\pi/2\right[$

Si $-\pi/2 < x < \pi/2 \Rightarrow f(x) = A\,\text{sen}\,x + B$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (A \operatorname{sen}(x) + B) = A \operatorname{sen}(a) + B$$

f continua en $\left] -\pi/2 , \pi/2 \right[$

Si $x \geq \pi/2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cos(x)$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a) = f(a)$$

f continua en $\left] \pi/2 , \infty \right[$

Estudio de continuidad en - $\pi/2$:

$$f(-\pi/2) = -2 \operatorname{sen}(-\pi/2) = 2$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-} (-2\operatorname{sen}x) = 2 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} (\mathrm{A}\operatorname{sen}x + \mathrm{B}) = -\mathrm{A} + \mathrm{B} \qquad (2)$$

De (1) y (2) : - A + B = 2

Estudio en x = $\pi/2$:

$$f(\pi/2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\mathrm{A}\operatorname{sen}x + \mathrm{B}) = \mathrm{A} + \mathrm{B} \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos x = 0 \qquad (4)$$

De (3) y (4) : A + B = 0

$$\therefore \quad \begin{array}{r|} -A + B = 2 \\ A + B = 0 \\ \hline \end{array}$$

Sumando se obtiene 2B = 2 entonces B = 1 y A = -1.Con tales valores
La función es continua en todo IR.

Ejercicios propuestos .-

1.-Clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones :

$a)\ f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ $\qquad c)\ f(x) = \dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} x+3 \ , \ si\ x \geq 2 \\ x^2+1, \ si\ \ x<0 \end{cases} \qquad e)\ f(x) = \frac{x^3+x^2-17x+15}{x^2+2x-15}$$

$$g)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x} \qquad h)\ f(x) = \begin{cases} xsen\dfrac{1}{x} \ , \ si\ \ x \neq 0 \\ 0 \qquad , \ si\ \ x=0 \end{cases}$$

$$i)\ f(x) = \begin{cases} 4-x \ , \ si\ x \geq 3 \\ x-2 \ , \ si\ 0<x<3 \\ x-1 \ , \ si\ x \leq 0 \end{cases}$$

2.- Determine si la función definida por :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & , \ si\ x<a \\ \dfrac{sen(x^2-a^2)}{x-a} & , \ si\ \ x>a \\ \dfrac{a}{2} & , \ si\ x=a \end{cases}$$

es continua en x = a .

3.-Encontrar valores de las constantes A y B de modo que la función definida por :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(Ax+B)^2 - B^2}{Ax} & , \ si \ x < 0 \\ \dfrac{\cos Ax - \cos Bx}{x^2} & , \ si \ x > 0 \\ -14 & , \ si \ x = 0 \end{cases}$$

sea continua en x = 0 .

Ayuda : Para calcular los límites laterales puede usar la Regla de L'hopital.

4.-Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1+3^{\frac{1}{x}}}{1-3^{\frac{1}{x}}}$, tiene discontinuidad irreparable en x=0 .

5.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{sen(x^2)} & , \ si \ x \neq 0 \\ 0 & , \ si \ x = 0 \end{cases}$

determine si ella es continua en x = 0 .

6.- Determine el o los valores de a , reales , sabiendo, que la función :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 - a^2x^2) + \ln(1+ax)^{-1}}{x} & , \ si \ x < 0 \\ x^2 - 9 & , \ si \ x = 0 \end{cases}$$

es continua en todo IR.