AXIOMAS DE CUERPO (CAMPO)
DE LOS NÚMEROS REALES

un número real es un elemento de un cierto conjunto, $\mathbb{R}$, el cual satisface ciertas propiedades básicas que estableceremos como "punto de partida". Estos son los *axiomas* de los cuales pueden deducirse todas las propiedades conocidas de los números reales. Sobre la naturaleza misma de ellos no discutiremos más, aunque nos cuidaremos de verificar que los axiomas elegidos coincidan con el modelo visto en la sección 2 (los reales como puntos del eje numérico).

Tales axiomas se dividirán a tres grupos, atendiendo a distintos aspectos de los reales que queremos enfatizar.

Axiomas de Campo

En el conjunto $\mathbb{R}$ existen dos operaciones, $+$ y $\cdot$ (suma y producto, respectivamente) tales que:

C1) $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma. Esto es,

$$x,\, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x+y \in \mathbb{R}.$$

C2) La suma es conmutativa. Esto es,

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x\,.$$

C3) La suma es asociativa. Esto es,

$$\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R},\ x+(y+z) = (x+y)+z\,.$$

C4) Existe un elemento neutro para la suma. Esto es,

$$\text{Existe } e \in \mathbb{R} \text{ tal que } x+e = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

C5) Todo número real posee un inverso aditivo. Esto es,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x+y = e.$$

C6) $\mathbb{R}$ es cerrado bajo el producto. Esto es,

$$x,\, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \in \mathbb{R}\,.$$

C7) El producto es conmutativo. Esto es,

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\;\; x \cdot y \;=\; y \cdot x\,.$$

C8) El producto es asociativo. Esto es,

$$\forall\, x,\, y z \in \mathbb{R},\;\; x \cdot (y \cdot z) \;=\; (x \cdot y) \cdot z\,.$$

C9) Existe un elemento neutro para el producto, el cual es distinto del neutro aditivo. Esto es,

$$\text{Existe } i \in \mathbb{R} \text{ tal que } i \neq e \;\&\; x \cdot i \;=\; x,\;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

C10) Todo número real distinto de e posee un inverso multiplicativo. Esto es,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; \text{si } x \neq e, \text{ entonces existe } z \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \cdot z \;=\; i.$$

C11) El producto es distributivo sobre la suma. Esto es,

$$\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R},\;\; x \cdot (y + z) \;=\; x \cdot y + x \cdot z\,.$$

Veamos ahora que este modelo abstracto permite efectivamente llevar a cabo la construcción de los reales desarrollada en la sección anterior.

Si identificamos los elementos neutros e, i con 0 y 1, respectivamente y el inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$ lo denotamos por $-x$ (lo cual haremos de ahora en adelante) entonces, para cualquier número natural n podemos indentificar el elemento

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots 1}_{n\ veces}$$

con n, y el elemento

$$\underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \cdots (-1)}_{n\ veces}$$

con el entero negativo $-n$.

Así, el conjunto $\mathbb{R}$ contiene "una copia de $\mathbb{Z}$."

Más aún, si identificamos el inverso multiplicativo del natural n, con la fracción $\frac{1}{n}$ entonces, para cualquier natural m,

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots \frac{1}{n}}_{m \; veces}$$

con $\frac{m}{n}$, y el elemento

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right) + \left(-\frac{1}{n}\right) + \left(-\frac{1}{n}\right) + \cdots \left(-\frac{1}{n}\right)}_{m \; veces}$$

con la fracción negativa $-\frac{m}{n}$. Tenemos sí que $\mathbb{R}$ contiene, de hecho, “una copia de $\mathbb{Q}$.”

Los axiomas enunciados no sólo nos garantizan que en el sistema de los números reales pueden generarse objetos que siguen el mismo patrón de construcción de los racionales que vimos en la sección 2, sino también nos permiten demostrar todas las “propiedades algebraicas” que ya se conocen del colegio.

Ejemplo:

Demostremos, usando los axiomas, que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \cdot x = 0$.

Como 0 es neutro aditivo, $0 + 0 = 0$.

Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por el real x y usando la distributividad, tenemos que

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Ahora sumamos a ambos lados de la última igualdad el real $-(0 \cdot x)$ (el inverso aditivo de $0 \cdot x$) y aplicamos la asociatividad, obteniendo así,

$$0 \cdot x + (-(0 \cdot x)) = 0 \cdot x + (\, 0 \cdot x + (-0 \cdot x)\,)\,.$$

Pero, por definición de inverso aditivo, $0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0$. Por lo tanto,

$$0 = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x \quad \blacksquare$$

Ejemplo:

Demostraremos ahora que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

Primero que nada, entendamos bien lo que cada lado de la igualdad a demostrar significa.

El número $(-x) \cdot y$ representa el producto entre el inverso aditivo de x e y, y mientras que $-(x \cdot y)$ representa el inverso aditivo de $x \cdot y$.

Para establecer la igualdad debemos, pues, mostrar que $(-x) \cdot y$ es inverso aditivo de $x \cdot y$. Esto es, que $x \cdot y + (-x) \cdot y = 0$.

Pero esto sigue directamente de la ley distributiva, ya que

$$x \cdot y + (-x) \cdot y = (\, x + (-x)\,) \cdot y = 0 \cdot y = 0,$$

por la propiedad ya probada en el ejemplo anterior $\blacksquare$

Observación : Como es tradicional, de aquí en adelante usaremos la notación xy para el producto $x \cdot y$ y $x - y$ para la suma $x + (-y)$.

Y no abundaremos mayormente en esta área. Los ejemplos anteriores nos dan una idea de como funciona este método: a partir de los axiomas se van demostrando nuevas propiedades (*teoremas*). Ante cada nuevo teorema que deseamos probar podemos usar, no solamente los axiomas iniciales , sino también los teoremas que ya han sido previamente establecidos. Así, los dos "teoremas" anteriores no habrían podido probarse en el orden opuesto, o al menos no en la forma en que lo hicimos, ya que en la demostración del segundo hicimos uso del primero.

A este respecto conviene hacer notar una sutileza que puede haber pasado inadvertida en la demostración del último ejercicio y que también dice relación con la notación adoptada. Los axiomas establecen que cada número real posee un inverso aditivo, pero no que éste sea único. Para pisar sobre una base sólida, debieramos probar la unicidad de tal inverso. Siendo único el inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$ no existe ambiguedad en llamarlo $-x$. Por otra parte, ello nos dice que si cualquier y satisface $x + y = 0$, entonces $y = -x$.

Ejercicio:

Demuestre que el inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$ es único.

Sugerencia : Suponga que y_1 e y_2 ambos satisfacen $x + y_1 = x + y_2 = 0$. Usando los axiomas pruebe que $y_1 = y_2$.

Baste repetir, para terminar esta sección, que con los axiomas de campo se pueden probar todas las propiedades algebraicas de los reales vistas en la Enseñanza Media, las cuales se darán por conocidas en lo que resta del curso.

Axiomas de Orden

Al visualizar los reales como puntos en una recta *orientada*, inmediatamente tenemos una noción de *orden*. Un real x se dice menor que otro real y (y lo anotamos $x < y$) si el punto correspondiente a x está a la izquierda del que corresponde a y.

Para llevar este concepto a nuestra construcción teórica de $\mathbb{R}$ necesitamos de nuevos axiomas que no sólo den cuenta de este ordenamiento sino, más importante aún, de cómo se afectan las desigualdades al efectuar operaciones algebraicas con sus miembros.

Para ello observamos que la orientación de la recta numérica divide a ésta en tres subconjuntos que no poseen elementos comunes: los positivos, los negativos y el cero (que hace de separación entre ambos). Notamos también que la desigualdad $x < y$ es equivalente a decir que $y - x$ es positivo. Por último, observamos que el subconjunto de los positivos es cerrado respecto las dos operaciones básicas (la suma y el producto de dos positivos son números positivos).

Con esto en mente introduciremos, como axiomas, la existencia de un subconjunto P de $\mathbb{R}$ (la P es por positivo) y las propiedades que establecen lo mencionado arriba.

O1) Existe un subconjunto no vacío, $P \subset \mathbb{R}$ tal que, para todo real x una y sólo una de las siguientes propiedades es cierta:

$$x \in P; \qquad -x \in P; \qquad x = 0.$$

O2) P es cerrado bajo la suma. Esto es,

$$x, y \in P \quad \Rightarrow \quad x + y \in P.$$

O3) P es cerrado bajo el producto. Esto es,

$$x, y \in P \quad \Rightarrow \quad xy \in P.$$

Ahora denotaremos la relación $x \in P$ por $x > 0$ y definiremos:

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad y - x > 0; \qquad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \;\; \text{o} \;\; x = y.$$

Del mismo modo, la notación $x > y$ será sinónimo de $y < x$ (lo mismo para $\geq$).

Ejemplo:

La relación $<$ es *transitiva.* Esto es,

$$x < y \;\; \& \;\; y < z \qquad \Longrightarrow \qquad x < z.$$

Para confirmarlo notamos que las hipótesis son $y - x > 0$ y $z - y > 0$ y que con ellas deseamos probar que $z - x > 0$.

Ahora bien, por el axioma O2,

$$y - x > 0 \;\; \& \;\; z - y > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (y - x) + (z - y) > 0.$$

Pero $(y-x)+(z-y) = z-x$, luego tenemos que $z-x > 0$ como deseábamos probar ■

Ejercicio:

Demuestre que si $a < b$ y c es un real cualquiera, entonces $a+c < b+c$. (Esto nos dice que una desigualdad se preserva si a ambos lados de ella se les suma un mismo número).

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo:

Demuestre que si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$. (Esto nos dice que una desigualdad se preserva si ambos lados de ella se multiplican por un mismo número positivo).

Por hipótesis, $b - a > 0$ y $c > 0$.

Luego, por el axioma O3, $(b - a)c > 0$.

Pero $(b - a)c = bc - ac$, luego tenemos que $bc - ac > 0$, lo cual equivale a que $ac < bc$, como deseábamos probar ■

Ejemplo:

Demuestre que si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$. (Esto nos dice que una desigualdad se invierte si ambos lados de ella se multiplican por un mismo número negativo).

Demostración: Ejercicio.

Observación: Las propiedades enunciadas en los tres últimos ejercicios son igualmente válidas si reemplazamos $a < b$ por $a \leq b$ (en las conclusiones también debemos usar $\leq$ o $\geq$ en lugar de las desigualdades estrictas que allí aparecen).

Ejemplo:

Demuestre que si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo:

Demuestre que $\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; x^2 \geq 0$.

Demostración: La afirmación es obvia si $x = 0$.

Si $x > 0$ entonces, por O3, $x^2 = x \cdot x > 0$.

Si $x < 0$ entonces, por uno de los ejercicios anteriores, $-x = (-1)x > 0$. Luego, como $x^2 = (-x)^2$ obtenemos que también en este caso $x^2 > 0$ ■

Ejemplo:

Demuestre que si a, b son reales cualesquiera, entonces $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Demostración: Simplemente aplicamos la propiedad anterior al real $x = a - b$ obteniendo

$$0 \leq x^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

y sumando $2ab$ a ambos lados de esta última desigualdad obtenemos el resultado ■

<u>Media Aritmética y Media Geométrica</u> : Dado un conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se define su *media aritmética* como

$$M.A. = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(esto es, el promedio simple de dichos números) y su *media geométrica* como

$$M.G. = \sqrt[n]{a_1\, a_2\, \cdots\, a_n}\,.$$

Por cierto que $M.G$ podría no estar definida si el producto de los números es negativo y n es par. No obstante, en la mayoría de los casos que nos interesan todos los números involucrados son positivos.

En particular, si en el ejemplo anterior hacemos $a^2 = \alpha$ y $b^2 = \beta$, entonces la desigualdad anterior se expresa como

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\,\beta}\,.$$

Como todo número positivo es un cuadrado, lo anterior nos dice que

La media aritmética de dos números positivos es siempre mayor o igual que su media geométrica.

Con argumentos que escapan a lo que sabemos hasta ahora se puede demostrar que la desigualdad $M.A. \geq M.G$ es cierta para cualquier conjunto de números positivos y que la igualdad se da solamente en el caso en que todos los números son iguales.

Así pues, consideraremos tal desigualdad como dada y la podemos pues usar como punto de partida para probar otras desigualdades más complejas, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Demostrar que si a, b y c son reales positivos, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Solución: Consideramos los números positivos

$$x_1 = \frac{a}{b}; \qquad x_2 = \frac{b}{c}; \qquad x_3 = \frac{c}{a}.$$

Por la desigualdad entre media aritmética y media geométrica tenemos que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1\, x_2\, x_3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \underbrace{\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}}_{1} = 3 \quad \blacksquare$$

Ejercicio: Dado un conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se define su *media armónica* como

$$M.H. = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

(esto es, el recíproco de la media aritmética de los recíprocos de los números dados).

Demuestre que si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todos positivos, entonces $M.G. \geq M.H.$

Ejemplo:

Demuestre que si a, b son positivos, entonces $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a^2 \leq b^2$.

Demostración: Ejercicio

Ejemplo:

Demuestre que si a, b son positivos, entonces $a \leq b \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Demostración: Si $a = b$ entonces el resultado se cumple ($\sqrt{a} = \sqrt{b}$).

Supongamos entonces que $a < b$. Entonces

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{(b - a)}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Ahora bien, como $a < b$ tenemos que $b - a > 0$.

Por otro lado, $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ es positivo, y por ejercicio anterior también lo es $\dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$.

Por lo tanto,

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = (b - a) \cdot \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$$

por ser producto de positivos. Luego, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ■

Por último mencionamos que con la noción de desigualdad podemos dar una definición precisa de *intervalo* (concepto que ya usamos, de manera informal, en el comienzo de este capítulo).

Si $a < b$ el *intervalo abierto* (a, b) es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ de todos los reales que están entre a y b. Por su parte, el *intervalo cerrado* $[a, b]$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ de todos los reales que están entre a y b además de los propios a y b. (El alumno podrá, sin dificultad, deducir lo que significa un intervalo *semi–abierto* $(a, b]$ o $[a, b)$).

Todas las propiedades demostradas en los ejercicios precedentes se dan por establecidas y pueden, por tanto, usarse libremente para demostrar nuevas desigualdades.

Ejemplo: Queremos probar que si $a > 0$ entonces $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$.

Lo que hacemos es escribir la desigualdad a probar en formas *equivalentes*. Esto es, formas que se pueden obtener de la original mediante propiedades válidas y viceversa. Así obtenemos

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2+1}{a} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2+1}{a} - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2-2a+1}{a} \geq 0.$$

Pero el numerador de la última fracción es $(a-1)^2 \geq 0$ por una propiedad demostrada anteriormente. Por otro lado sabemos también que $a > 0 \;\Rightarrow\; 1/a > 0$. Lego, el producto entre $a^2 - 2a + 1$ y $1/a$ es mayor o igual a cero, que es lo que queríamos demostrar.

Axioma de Completitud

Los axiomas hasta ahora introducidos no caracterizan exactamente al conjunto de los reales. En efecto, sabemos que los racionales verifican estos mismos axiomas y que la diferencia entre unos y otros está en el hecho que los reales forman un *continuo* de puntos, en tanto que los racionales dejan espacios en la recta.

Esta diferencia fundamental no puede deducirse de los axiomas ya vistos. En particular, ellos no nos permiten probar que existe un real x tal que $x^2 = 2$.

Necesitamos por tanto, un último axioma que dé cuenta de la completitud de los reales. Hay distintos axiomas alternativos que permiten eso. En este curso optaremos por el *axioma del supremo* sin embargo, por razones técnicas, pospondremos su discusión para más adelante. Con ellos se podrá probar, por ejemplo, que

- Si n es par y $a > 0$ entonces hay un real x tal que $x^n = a$. (Todo real positivo posee raíces de orden par).
- Si n es impar y $a > 0$ entonces, para todo $a \in \mathbb{R}$ hay un real x tal que $x^n = a$. (Todo real posee raíces de orden impar).

Como ya indicamos, una demostración rigurosa de tales resultados requiere de un axioma adicional, pero los daremos por establecidos desde ya a fin de tener una mayor flexibilidad en los temas que siguen.

5 Distancia entre números reales

Al visualizar los reales como puntos en una recta ordenada resulta que entre dos reales cualesquiera hay una distancia. Intuitivamente, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces su distancia es $a-b$ o $b-a$ dependiendo de si $b \leq a$ o $b > a$, respectivamente. A su vez, esta últimas son equivalentes a $a-b \geq 0$ y $a-b < 0$, respectivamente.

En otras palabras, si denotamos la distancia entre a y b por $d(a,b)$, tenemos que

$$d(a,b) = \begin{cases} a-b & \text{si} \quad a-b \geq 0 \\ -(a-b) & \text{si} \quad a-b < 0 \end{cases}$$

Motivados en lo anterior, definimos el *valor absoluto* de un número real x, y lo denotamos por $|x|$, por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Así, por ejemplo, $|3| = 3$; $|-2| = 2$ y observamos que $|x|$ representa la distancia entre el punto correspondiente a x y el origen.

Por tanto tenemos que

$$\boxed{\textit{La distancia entre los números reales } x \textit{ e } y \textit{ es } |x-y|.}$$

Observación: La definición de valor absoluto se puede expresar en una sóla fórmula: $|x| = \sqrt{x^2}$.

<u>Propiedades del valor absoluto</u>

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

VA1) $|x| \geq 0 \quad \& \quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.

VA2) $-|x| \leq x \leq |x|$.

VA3) $|x| = |-x|$.

VA4) Si $a > 0$ entonces $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-a, a)$.

VA5) Si $a > 0$ entonces $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-a, a]$.

VA6) Si $a > 0$ entonces $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x > a \ o \ x < -a \quad \leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

VA7) Si $a > 0$ entonces $|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \geq a \ o \ x \leq -a \quad \leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

VA8) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

VA9) Si $y \neq 0$ entonces $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

VA10) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad$ (*desigualdad triangular*).

VA11) $|x-y| \geq |x|-|y|$.

VA12) $|x-y| \geq \big| |x|-|y| \big|$.

Las demostraciones de muchas de estas propiedades son evidentes de la definición. Otras se demostrarán en clases. Por ahora, sólo queremos alertar sobre un error común.

La solución de la desigualdad (*inecuación*) $x^2 < 4$ **no es** $x < 2$. De ser así, $x = -3$ verificaría la desigualdad, en circunstancia que $(-3)^2 = 9 \geq 4$.

La respuesta correcta es $-2 < x < 2$ y esta se deduce fácilmente de la desigualdad original, tomando raíces cuadradas. En efecto, es obvio que $x = 0$ es una solución y si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$. Luego, en la desigualdad $x^2 < 4$ ambos lados son positivos y por tanto podemos tomar raíces cuadradas obteniendo $\sqrt{x^2} < 2$.

Pero (y esta es la razón del error mencionado), $\sqrt{x^2} \neq x$ sino que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Luego obtenemos $|x| < 2$, la cual, por (VA4) es equivalente con $-2 < x < 2$.

6 Inecuaciones

Con frecuencia nos enfrentamos al problema de encontrar los valores de una variable (digamos x) que verifican una determinada desigualdad. Tal problema se conoce como *inecuacioń* y resolver una tal inecuación es simplemente, aplicar a ambas lados de la desigualdad una serie de acciones válidas de modo de "despejar la incógnita", de la misma manera que una ecuación se resuelve aplicando a la igualdad dada una secuencia apropiada de operaciones.

Teniendo ya todas las reglas sobre desigualdades disponibles, no hay teoría nueva que introducir al respecto y procederemos, por la vía del ejemplo, a discutir algunos tipos de inecuaciones de uso frecuente.

Inecuaciones Cuadráticas : Son las del tipo $q(x) < 0$; $q(x) \leq 0$; $q(x) > 0$ o $q(x) \geq 0$ donde

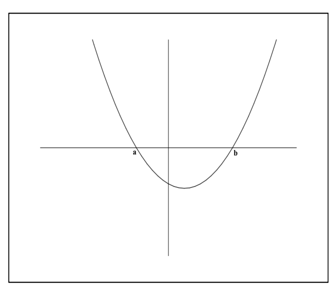
$$q(x) \;=\; ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0,$$

es una *función cuadrática.*

Del colegio sabemos que el gráfico de una tal función es una parábola, la cual se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Veamos algunos casos:

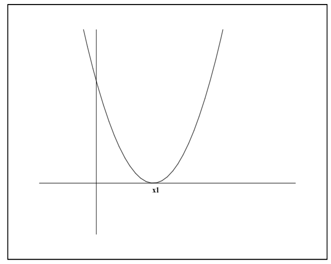
Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la parábola tiene dos raíces, x_1 y x_2 y su gráfico es de la forma mostrada al lado.

De allí es evidente que $q(x) < 0$ si y solamente si $x_1 < x < x_2$. Esto es, *entre las raíces*) y $q(x) > 0$ cuando $x < x_1$ o $x > x_2$.



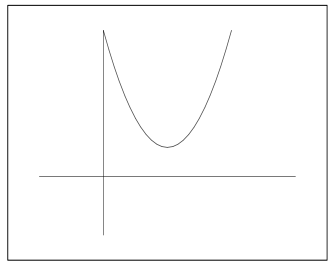
Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la parábola tiene una única raíz, x_1, y su gráfico es de la forma mostrada al lado.

De allí se ve que $q(x) > 0$ para todo x distinto de x_2 o que $q(x) \geq 0$ para todo x en $\mathbb{R}$.



Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la parábola no tiene raíces reales y su gráfico yace entero en el semiplano superior.

En este caso, para todo x en $\mathbb{R}$ se verifica que $q(x) > 0$.



Los casos en que $a < 0$ son análogos, sólo que ahora las parábolas se abren hacia abajo. También es válido recordar que si $q(x)$ es cuadrática con $a < 0$ entonces $-q(x)$ respresenta una parábola abierta hacia arriba y por ende, multiplicando la inecuación original por -1 convertirla en alguna de las vistas arriba.

Ejemplo: Resolver la inecuación $|x+1| > 1 - 2x$.

Solución: Notamos primero que si el lado derecho es negativo la desigualdad se cumple inmediatamente, ya que el lado izquierdo es siempre mayor o igual a cero (por ser un módulo).

Así pues, tenemos un primer conjunto de soluciones:

$$S_1 = \{x : 1 - 2x < 0\} = \{x : x > \frac{1}{2}\} = \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Si ahora $x \leq \frac{1}{2}$ la desigualdad anterior toma la forma

$$\sqrt{(x+1)^2} > 1 - 2x$$

donde ambas cantidades son positivas. Podemos, entonces, elevar la desigualdad al cuadrado obteniendo

$$\begin{aligned}
1 - 2x < |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2x < \sqrt{(x+1)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (1-2x)^2 < (x+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x + 1 < x^2 + 2x + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x < 0.
\end{aligned}$$

Como el lado izquierdo es una función cuadrática con $a > 0$ y raíces 0 y 2, tenemos que la última inecuación tiene solución $0 < x < 2$.

Dado que todo lo anterior se hizo bajo la restricción $x \leq \frac{1}{2}$ tenemos que el resto de las soluciones son

$$S_2 \;=\; \{\, x \,:\, x \leq \frac{1}{2} \;\;\&\;\; 0 < x < 2\} \;=\; \{\, x \,:\, 0 < x \leq \frac{1}{2}\} \;=\; (0,\, \frac{1}{2}\,].$$

La solución final la forman los números que pertenecen a cualquiera de ambos conjuntos. Esto es,

$$S_1 \cup S_2 \;=\; \{x \,:\, x > 0\} \;=\; (0,\, \infty).$$

<u>Otra forma</u> de atacar la inecuación anterior es usando la propiedad VA6:

$$\begin{aligned} |x+1| \;>\; 1-2x \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 \;>\; 1-2x \quad \text{o} \quad x+1 \;<\; 2x-1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x \;>\; 0 \quad \text{o} \quad 2 \;<\; x \\ &\Leftrightarrow \quad x \;>\; 0. \end{aligned}$$

La unión de ambos intervalos nos da la misma respuesta que antes.

Una <u>tercera forma</u> de enfrentar este problema consiste en dividir la búsqueda de soluciones por intervalos, de acuerdo al signo que tiene la cantidad encerrada en el vaor absoluto.

Como

$$|1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad 1+x \geq 0 \\ -1-x & \text{si} \quad 1+x < 0 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -1-x & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

buscamos, separadamente soluciones en los intervalos $I_1 \,=\, (-\infty,\, -1)$ e $I_2 \,=\, [-1,\, \infty)$.

De acuerdo a la representación de arriba, en I_1 la inecuación se convierte en

$$-1-x \;>\; 1-2x \quad \Leftrightarrow \quad x \;>\; 2.$$

Como ninguno de dichos puntos satisface la condición del intervalo I_1 (que sea $x < -1$) concluímos que en dicho intervalo no hay soluciones de la inecuación.

Buscamos ahora soluciones en I_2. Allí la inecuación se transforma en

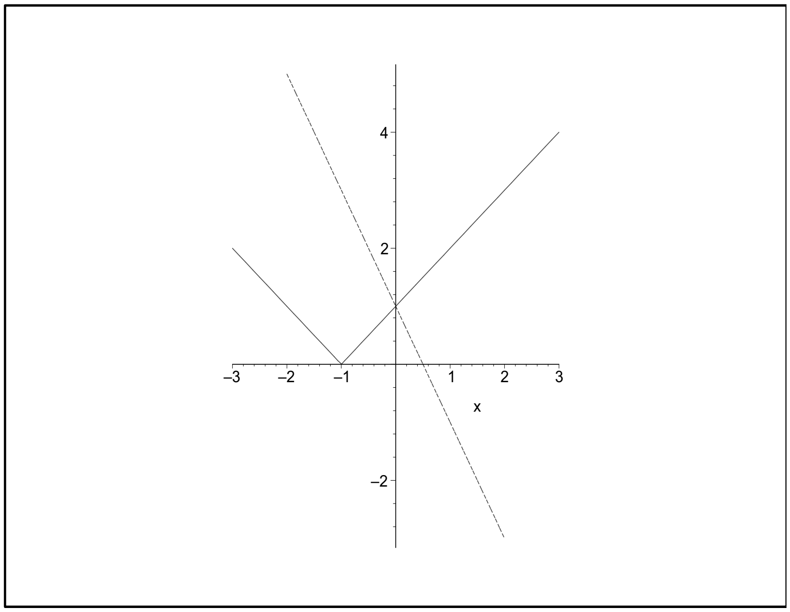
$$1+x \;>\; 1-2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x \;>\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \;>\; 0.$$

Todos esos puntos pertenecen a I_2 y por tanto todos son soluciones.

Reuniendo las soluciones halladas en cada intervalo llegamos (¡nuevamente!) a que la solución general es el intervalo $(0,\, \infty)$.

<u>*Análisis Gráfico*</u>: El conjunto solución de una inecuación $f(x) \;<\; g(x)$ es la proyección sobre el eje horizontal de los puntos en los que el gráfico de $y \,=\, g(x)$ está por encima del gráfico de $y = f(x)$.

Graficando las funciones $f(x) = 1 - 2x$ (en línea punteada) y $g(x) = |x+1|$ (en sólido) vemos, literalmente, la solución de la inecuación anterior:



Ejemplo: Resolver la inecuación $\dfrac{x}{x+2} \leq \dfrac{1}{x}$.

Solución: Nótese que no podemos llegar y "multiplicar cruzado" puesto que los denominadores son variables y podrían ser negativos para ciertos valores de x. Lo que hacemos entonces es juntar todos los términos en un lado de la desigualdad y manipular algebraicamente la combinación de fracciones que se produce:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+2} \leq \frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 2}{x\,(x+2)} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)\,(x+1)}{x\,(x+2)} \leq 0\,.
\end{aligned}$$

Ahora bien, la fracción es negativa si y solamente si numerador y denominador tienen signos distintos y es cero sólo si el numerador lo es. (Note que el denominador nunca puede ser cero pero en este caso las raíces del numerador sí aportan soluciones).

Por el análisis anterior de la desigualdad cuadrática,

$$(x-2)\,(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \text{ o } x \geq 2\,; \qquad (x-2)\,(x+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 2,$$

mientras que

$$x\,(x+2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \text{ o } x > 0\,; \qquad x\,(x+2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 0.$$

Luego, por el raciocinio de arriba,

$$\frac{(x-2)\,(x+1)}{x\,(x+2)} \;\leq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \,\in\, (\infty,\,-2) \;\cup\; [-1,\,0) \;\cup\; [2,\,\infty).$$

Podemos arribar a dicho resultado mediante una tabla que registre los signos de cada uno de los factores. Como los puntos críticos son -2, -1, 0 y 1 tenemos

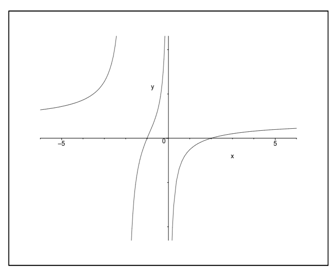
	$-\infty$	-2	-1	0	1	∞
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$\dfrac{(x-2)\,(x+1)}{x\,(x+2)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

De donde obtenemos el mismo resultado en base a la regla de los signos.

La figura del lado ilustra el gráfico de la función

$$y \;=\; \frac{(x-2)\,(x+1)}{x\,(x+2)}$$

y observamos que la solución hallada arriba se corresponde con los trozos en que la curva está encima o sobre el eje horizontal



Ejemplo: Resuelva la inecuación $\sqrt{x^2-2x} \,-\, 1 \;<\; \sqrt{x^2+x+1}\,.$

Solución: Primero que nada, debemos asegurarnos que las cantidades bajo las raíces cuadradas sean no–negativas:

Como x^2+x+1 tiene discriminante negativo y su coeficiente principal es positivo, tenemos que $x^2+x+1>0$ para todo x.

Por su parte, $x^2-2x \,=\, x(x-2)$ es negativo cuando $0<x<2$. Por lo tanto la inecuación sólo tiene sentido si

$$x \;\leq\; 0 \quad \text{o} \quad x \;\geq\; 2. \qquad\qquad (1)$$

Bajo la restricción anterior re–escribimos la inecuación como

$$\sqrt{x^2-2x} \;<\; 1 \,+\, \sqrt{x^2+x+1}\,.$$

Como ambos lados son positivos, podemos elevar al cuadrado, obteniendo:

$$x^2 - 2x \; < \; 1 \, + \, 2\sqrt{x^2+x+1} \, + \, (x^2+x+1) \quad \leftrightarrow \quad -3x \, - \, 2 \; < \; 2\sqrt{x^2+x+1}$$

y consideramos dos casos:

i) $-3x-2 \geq 0 \;\; \leftrightarrow \;\; x \leq -\dfrac{2}{3}$: En este caso, siendo ambos miembros de la última desigualdad positivos, podemos elevar al cuadrado obteniendo

$$(3x \, + \, 2)^2 \; < \; 4(x^2+x+1) \quad \leftrightarrow \quad 5x^2 \, + \, 8x \; < \; 0 \quad \leftrightarrow \quad x(5x+8) \, < \, 0.$$

Esta desigualdad tiene solución $-\dfrac{8}{5} \, < \, x \, < \, 0$ pero, como hemos supuesto que $x \leq -\dfrac{2}{3}$ tenemos que sólo nos sirven los valores de x tales que $-\dfrac{8}{5} < x \, \leq \, -\dfrac{2}{3}$.

ii) $-3x-2 < 0 \;\; \leftrightarrow \;\; x > -\dfrac{2}{3}$: En este caso, como el lado izquierdo es negativo y el derecho es positivo, la desigualdad se cumple trivialmente para todos esos x.

Así, reuniendo ambos conjuntos de soluciones, tenemos que

$$-3x \, - \, 2 \; < \; 2\sqrt{x^2+x+1} \quad \leftrightarrow \quad x \, > \, -\frac{8}{5}\,.$$

Finalmente, recordando la restricción (1), tenemos que la solución final es

$$x \; \in \; (-\frac{8}{5}, 0] \quad \cup \quad [2, \infty) \quad \blacksquare$$