Salomón Alarcón Araneda & Pablo González Lever

# Cálculo Diferencial

# Prefacio

Estimados alumnos de carreras de la salud e ingienerías en ejecución, este libro surge como una respuesta al constante requerimento que muchos de ustedes han manifestado por encontrar un texto de apoyo al curso de Cálculo I de sus respectivas carreras, que interprete de mejor forma sus necesidades académicas y que concuerde con sus programas de estudios.

Nuestro interés es atender vuestros requerimientos de una forma adecuada, con el fin de apoyar y profundizar el estudio del Cálculo Diferencial, pero sin entrar en las sutilezas propias de las matemáticas. Por esta razón algunos de los temas aquí presentados no están ordenados necesariamente de acuerdo a un enfoque científico-matemático propiamente tal, sino que mas bien ellos son presentados en un orden de carácter práctico. Aun así, hemos decidido introducir algunos elementos formales de la matemática con el único fin de ahondar en aquellos aspectos que son razonables en el contexto del curso y que requieren un nivel de abstracción que conviene que ustedes desarrollen.

Debemos aclarar que esta es una versión preliminar del texto, la cuál aún debe ser mejorada en varios aspectos, lo que esperamos hacer durante el transcurso de este año. Por lo tanto, esta versión se actualizará constantemente.

Finalmente, esperamos que este texto sea del agrado de ustedes y les sirva de apoyo al momento de estudiar.

**Los autores.**

# Índice general

# Parte I

# Funciones Reales

Capítulo 1

# El Cuerpo de los Números Reales

Desde la perspectiva del Cálculo el conjunto numérico de mayor relevancia es el de los números reales debido a la gran cantidad propiedades que verifican sus elementos. Estas propiedades se pueden separar en tres grupos:

1. *axiomas de cuerpo*

2. *axiomas de orden*

3. *axioma de completitud*

El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$ y antes de estudiar cada uno de los grupos de axiomas mencionados anteriormente, es conveniente recordar algunos subconjuntos notables de $\mathbb{R}$ y sus notaciones. Tenemos:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ denota el conjunto de los números naturales.
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ denota el conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q \neq 0\right\}$ denota el conjunto de los números racionales.
$\mathbb{I}$ denota a los números irracionales.

OBSERVACIÓN 1.1 Es conocido que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ y $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$. Más aún, $\mathbb{Q}$ contiene a todos aquellos números que tienen representación fraccionaria, es decir los números con una cantidad finita de decimales o con una cantidad infinita periódica; mientras que $\mathbb{I}$ contiene a todos aquellos números que poseen infinitos decimales y que no son periódicos.

## 1.1. Axiomas de cuerpo en $\mathbb{R}$

Ahora nos interesa estudiar algunas propiedades que verifican los números reales y para ello consideramos las operaciones: adición, que denotamos $+$, y multiplicación, que denotamos $\cdot$, en $\mathbb{R}$. El trío $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ denota a $\mathbb{R}$ dotado de estás dos operaciones y verifica las siguientes propiedades:

PARA LA OPERACIÓN ADICIÓN EN $\mathbb{R}$.

(A0) Propiedad de clausura:
$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a + b \in \mathbb{R})$$

(A1) Propiedad conmutativa:
$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a + b = b + a)$$

(A2) Propiedad asociativa:
$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big(a + (b + c) = (a + b) + c\big)$$

(A3) Propiedad de existencia de elemento neutro aditivo (el cero):
$$(\exists 0 \in \mathbb{R}) \text{ tal que } (\forall a \in \mathbb{R})(0 + a = a + 0 = a)$$

(A4) Propiedad de existencia de elemento inverso aditivo:
$$(\forall a \in \mathbb{R})\big(\exists(-a) \in \mathbb{R}\big) \text{ tal que } \big(a + (-a) = (-a) + a = 0\big).$$

PARA LA OPERACIÓN MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{R}$.

(M0) Propiedad de clausura:
$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \cdot b \in \mathbb{R})$$

(M1) Propiedad conmutativa:
$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \cdot b = b \cdot a)$$

(M2) Propiedad asociativa:
$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\big)$$

(M3) Propiedad de existencia de elemento neutro multiplicativo (el uno):
$$(\exists 1 \in \mathbb{R}) \text{ tal que } (\forall a \in \mathbb{R})(1 \cdot a = a \cdot 1 = a)$$

(M4) Propiedad de elemento inverso multiplicativo salvo para el neutro aditivo:
$$(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ tal que } \big(a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1\big)$$

PROPIEDAD QUE RELACIONA LA ADICIÓN Y LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{R}$.

(MA) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:
$$a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Las propiedades (A0)-(A4) constituyen un grupo conmutativo sobre el par $(\mathbb{R}, +)$; las propiedades (M0)-(M4) constituyen un grupo conmutativo sobre el par $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. y además tenemos la propiedad (MA). En consecuencia, el trío $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ posee la estructura algebraica conocida como *cuerpo*. Todas las propiedades anteriores constituyen los *axiomas de cuerpo en* $\mathbb{R}$ por lo que ellas se aceptan y no requieren demostración.

### 1.1.1. Otras propiedades de los números reales

A partir de estos axiomas y usando las reglas de la lógica formal, podemos obtener otras propiedades que cumplen los números reales:

1. [0 es elemento absorvente multiplicativo] $(\forall a \in \mathbb{R})(a \cdot 0 = 0)$

   **Demostración.**

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{propiedad (A3)} \\ &= a \cdot 0 + (a + (-a)) && \text{propiedad (A4)} \\ &= (a \cdot 0 + a) + (-a) && \text{propiedad (A2)} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{propiedad (M3)} \\ &= a \cdot (0 + 1) + (-a) && \text{propiedad (MA)} \\ &= a \cdot 1 + (-a) && \text{propiedad (A3)} \\ &= a + (-a) && \text{propiedad (M3)} \\ &= 0 && \text{propiedad (A4).} \quad \square \end{aligned}$$

2. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

   **Demostración.**

   $(\Rightarrow)$ Queremos probar que el enunciado

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$$

   es verdadero. Para ello argumentamos por reducción al absurdo, esto es, asumamos que la negación del enunciado es verdadera y lleguemos a una contradicción.

   Asumamos que

$$a \cdot b = 0 \ \wedge \ a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0.$$

   Se sigue que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{propiedad (A3)} \\ &= a \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{propiedad (M4)} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{propiedad (M2)} \\ &= 0 \cdot b^{-1} && \text{pues } a \cdot b = 0 \\ &= 0 && \text{por 1. anterior.} \end{aligned}$$

   Concluimos que $a = 0$, pero por otro lado partimos suponiendo que $a \neq 0$. Entonces hemos obtenido una contradicción. Esto quiere decir que la negación del enunciado es falsa, y por lo tanto el enunciado es verdadero.

($\Leftarrow$)

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a = 0 \ \vee \ b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0)$$

es directo desde 1. $\square$

3. [Cancelación aditiva] $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a + b = a + c \Leftrightarrow b = c)$

**Demostración.** ($\Rightarrow$)
$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{propiedad (A3)} \\ &= b + (a + (-a)) && \text{propiedad (A4)} \\ &= (b + a) + (-a) && \text{propiedad (A2)} \\ &= (c + a) + (-a) && \text{pues } a + b = a + c \\ &= c + (a + (-a)) && \text{propiedad (A2)} \\ &= c + 0 && \text{propiedad (A4)} \\ &= c && \text{propiedad (A3).} \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Es directa desde la definición de igualdad. $\square$

4. $(\forall a \in \mathbb{R})\big(-(-a) = a\big)$

**Demostración.** Sea $a$ un número real, entonces $(-a)$ es su inverso aditivo. A su vez, $[-(-a)]$ es el inverso aditivo de $(-a)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} -(-a) &= 0 + [-(-a)] && \text{propiedad (A3)} \\ &= (a + (-a)) + [-(-a)] && \text{propiedad (A4)} \\ &= a + \big((-a) + [-(-a)]\big) && \text{propiedad (A2)} \\ &= a + 0 && \text{propiedad (A4)} \\ &= a && \text{propiedad (A3).} \quad \square \end{aligned}$$

Antes de continuar introducimos la siguiente notación:

1. Se define la operación sustracción en $\mathbb{R}$, la cual denotamos por $-$, como sigue:
$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\big(a - b = a + (-b)\big)$$

2. Se define la operación división en $\mathbb{R}$, la cual denotamos por $:$, como sigue:
$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\Big(a : b = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}\Big)$$

3. Se define la operación potencia entera de un número real como sigue:
$$(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall n \in \mathbb{N})(a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{multiplicar } n \text{ veces } a})$$
$$(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall n \in \mathbb{N})\big(a^{-n} = (a^{-1})^n\big)$$
$$0^0 = 1$$

EJERCICIOS 1.1 Demuestre cada una de las siguientes propiedades en $\mathbb{R}$.

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R})\big(a - (-b) = a + b\big)$
2. $(\forall a, b \in \mathbb{R})\big(a - b = 0 \Leftrightarrow a = b\big)$
3. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big(a - (b + c) = a - b - c\big)$
4. [Cancelación multiplicativa] $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \cdot b = a \cdot c \ \wedge \ a \neq 0 \Leftrightarrow b = c)$
5. $(\forall a \in \mathbb{R})\big((a^{-1})^{-1} = a\big)$
6. $(\forall a, b \in \mathbb{R})\big(a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}\big)$
7. $(\forall a \in \mathbb{R})\big((-1) \cdot a = -a\big)$
8. $(\forall a \in \mathbb{R})\Big(\dfrac{a}{1} = a\Big)$
9. $(\forall a \in \mathbb{R})\Big(a \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} = a^{-1}\Big)$
10. $(-1)^2 = 1$
11. $(\forall a \in \mathbb{R})\big((-a)^2 = a^2\big)$
12. $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\Big(b \neq 0 \ \wedge \ d \neq 0 \Rightarrow \Big[\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c\Big]\Big)$
13. $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\Big(b \neq 0 \ \wedge \ d \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}\Big)$
14. $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\Big(b \neq 0 \ \wedge \ d \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}\Big)$
15. $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\Big(b \neq 0 \ \wedge \ c \neq 0 \ d \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}\Big)$

### 1.1.2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

El siguiente teorema establece la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación de primer grado con una incógnita con coeficiente no nulo:

TEOREMA 1.1 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. La ecuación de primer grado:

$$ax + b = c$$

posee solución única.

**Demostración.** Para la existencia tenemos:

$$\begin{aligned} ax+b=c &\Rightarrow ax+b+(-b)=c+(-b)\\ &\Rightarrow ax+\big(b+(-b)\big)=c-b\\ &\Rightarrow ax+0=c-b\\ &\Rightarrow ax=c-b\\ &\Rightarrow a^{-1}\cdot a\cdot x=a^{-1}\cdot(c-b)\\ &\Rightarrow \left(a^{-1}\cdot a\right)\cdot x=\frac{c-b}{a}\\ &\Rightarrow 1\cdot x=\frac{c-b}{a}\\ &\Rightarrow x=\frac{c-b}{a}. \end{aligned}$$

Para la unicidad supongamos que existe una segunda solución de la ecuación, la cual llamaremos $z$ y probemos que en realidad se trata de la misma solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} ax+b=c \;\wedge\; az+b=c &\Rightarrow ax+b=az+b\\ &\Rightarrow ax=az\\ &\Rightarrow x=z. \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.2 Antes de continuar es conveniente recordar los siguientes productos notables:

1. [Cuadrado de un binomio] $(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$
2. [Cubo de un binomio] $(x\pm a)^3=x^3\pm 3x^2a+3a^2x\pm a^3$
3. [Suma por su diferencia] $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$
4. [Producto de binomios con término común] $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
5. [Diferencia de cubos] $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
6. [Suma de cubos] $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$. $\square$

EJEMPLOS 1.1 Resolver las siguientes ecuaciones para $x$.

1. $4x+16=14$
2. $(x+3)^2=(x-2)(x+1)$
3. $(x-3)(x+1)=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})-2x$
4. $(x+1)^2-2x=x^2$
5. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{1-2x}=0 \quad [x\neq 2 \;\wedge\; x\neq 3]$
6. *a*) $\dfrac{x+a}{5}+\dfrac{x+b}{10}=1$
   *b*) ¿Cuánto vale $x$ si $a=5$ y $b=0$?

7. *a*) $(x-a)(x+a)=(x-2a)^2 \quad [a \neq 0]$

   *b*) ¿Cuál debe ser el valor de $a$ para que la solución en *a)* sea $\frac{1}{2}$?

**Soluciones.**

1. $$\begin{aligned} 4x+16=14 &\Rightarrow 4x=14-16 \\ &\Rightarrow 4x=-2 \\ &\Rightarrow x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (x+3)^2=(x-2)(x+1) &\Rightarrow x^2+6x+9=x^2-x-2 \\ &\Rightarrow 6x+9=-x-2 \\ &\Rightarrow 7x=-11 \\ &\Rightarrow x=-\frac{11}{7} \quad \square \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} (x-3)(x+1)=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})-2x &\Rightarrow x^2-2x-3=x^2-3-2x \\ &\Rightarrow 0=0 \end{aligned}$$

   Como hemos llegado a un resultado que es verdadero, tenemos que
   $\therefore$ cualquier $x \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación. $\square$

4. $$\begin{aligned} (x+1)^2-2x=x^2 &\Rightarrow x^2+2x+1-2x=x^2 \\ &\Rightarrow 1=0 \end{aligned}$$

   Como hemos llegado a un resultado que es falso, tenemos que
   $\therefore$ ningún $x \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación. $\square$

5. $$\begin{aligned} \frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-2}-\frac{4}{1-2x}=0 &\Rightarrow \frac{(x-2)-3(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{4}{1-2x} \\ &\Rightarrow \frac{x-2-3x+9}{(x-2)(x-3)}=\frac{4}{1-2x} \\ &\Rightarrow \frac{-2x+7}{(x^2-5x+6)}=\frac{4}{1-2x} \\ &\Rightarrow (7-2x)(1-2x)=4(x^2-5x+6) \\ &\Rightarrow 7-16x+4x^2=4x^2-20x+24 \\ &\Rightarrow 4x=17 \\ &\Rightarrow x=\frac{17}{4} \quad \square \end{aligned}$$

6. *a*) $$\begin{aligned} \frac{x+a}{5}+\frac{x+b}{10}=1 &\Rightarrow \frac{2(x+a)+(x+b)}{10}=1 \\ &\Rightarrow 2x+2a+x+b=10 \\ &\Rightarrow 3x=10-2a-b \\ &\Rightarrow x=\frac{10-2a-b}{3} \quad \square \end{aligned}$$

*b*) Cuando $a = 5$ y $b = 0$, obtenemos $x = \dfrac{10 - 2a - b}{3} = \dfrac{10 - 10 - 0}{3} = 0.$ $\square$

7. *a*) $$\begin{aligned}(x-a)(x+a) = (x-2a)^2 &\Rightarrow x^2 - a^2 = x^2 - 4ax + 4a^2\\ &\Rightarrow 0 = -4ax + 5a^2\\ &\Rightarrow 4ax = 5a^2\\ &\Rightarrow x = \frac{5a^2}{4a} \quad \text{(pues } a \neq 0\text{)}\\ &\Rightarrow x = \frac{5a}{4} \quad \square\end{aligned}$$

   *b*) $x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{5a}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ $\square$

EJERCICIOS 1.2

1. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

   *a*) $\left(\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}\right)$

   *b*) $(12b + 3a)^2 - (1 - 2b + 3a)^2$

   *c*) $\dfrac{a + 5b}{a^2 + 6ab} : \dfrac{ab + 5b^2}{ax^3 + 6a^2b}$

   *d*) $\dfrac{3ax^2 + 3a^2x - 6a^2x^2}{ax^3 - a^3x}$

2. Verificar que se cumplen las siguientes igualdades

   *a*) $\dfrac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)} = \dfrac{ax + by}{ax - by}$, si $ax \neq by \ \wedge \ bx \neq -ay$

   *b*) $\left(\dfrac{x - a}{x - b}\right)^3 - \dfrac{x - 2a + b}{x + a - 2b} = 0$, si $x = \dfrac{a + b}{2}$

3. Demuestre que si $a \neq -b$, $a \neq -c$ y $b \neq -c$, entonces:

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 1$$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   *a*) $\dfrac{2}{4x - 5} - \dfrac{6x + 5}{16x^2 - 25} = \dfrac{3}{4x + 5}$

   *b*) $\dfrac{x}{x - 3} - \dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{6x - 4}{x^2 - 5x + 6} = 0$

5. Hallar el valor de $a$ y $b$, de modo que para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$ se verifique la igualdad:

$$\frac{6x - 2}{x^2 + x - 12} = \frac{a}{x + 4} + \frac{b}{x - 3}$$

## 1.2. Axiomas de orden

Para establecer una relación de orden en el conjunto de los números reales, es conveniente considerar un subconjunto de $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}^+$, el cual llamaremos conjunto de los números reales positivos. Este conjunto queda definido por los siguientes axiomas:

(O1) **Propiedad de invarianza para la adición**

La suma de números positivos es un número positivo. Esto es:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+)$$

(O2) **Propiedad de invarianza para la multiplicación**

El producto de números positivos es un número positivo. Esto es:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^+)$$

(O3) **Propiedad de Tricotomía**

Un número real verifica una y sólo una de las siguientes posibilidades, o bien el número es positivo, o bien el número es cero, o bien su inverso aditivo es un número positivo. Esto es:

$$(\forall a \in \mathbb{R})(a \in \mathbb{R}^+ \veebar a = 0 \veebar \ -a \in \mathbb{R}^+)$$

DEFINICIÓN 1.1 Sean $a, b$ dos números reales. Se definen las iguientes relaciones de *desigualdad* entre $a$ y $b$:

1. *$a$ es mayor que $b$*, lo que denotamos por $a > b$, si y sólo si $a - b$ es un número positivo; es decir:
$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$$
2. *$a$ es mayor o igual que $b$*, lo que denotamos por $a \geqslant b$, si y sólo si $a - b$ es un número positivo, ó $a$ es igual a $b$; es decir:
$$a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b$$
3. *$a$ es menor que $b$*, lo que denotamos por $a < b$, si y sólo si $b - a$ es un número positivo; es decir:
$$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$$
4. *$a$ es menor o igual que $b$*, lo que denotamos por $a \leqslant b$, si y sólo si $b - a$ es un número positivo, ó $a$ es igual a $b$; es decir:
$$a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b$$

Notemos que por definición de "mayor que", tenemos que

$$a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0.$$

Por otro lado, por propiedad de tricotomía tenemos que, si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\begin{aligned} -a \notin \mathbb{R}^+ \ \wedge \ a \neq 0 &\Rightarrow -a \leq 0 \ \wedge \ -a \neq 0 \\ &\Rightarrow -a < 0. \end{aligned}$$

De esta forma surge naturalmente otro subconjunto en $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}^-$, el cual llamamos conjunto de los números reales negativos. Más aún,

$$a \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow a < 0.$$

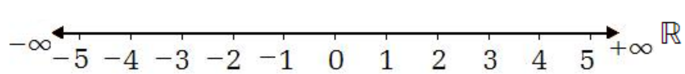
Es claro ahora que $\mathbb{R}^-$ corresponde al conjunto de los inversos aditivos de los elementos en $\mathbb{R}^+$, y que la unión de ambos conjuntos con cero resulta ser todo $\mathbb{R}$. Es decir,

$$a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^- \veebar a = 0 \veebar a \in \mathbb{R}^+$$

En otras palabras,

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \quad \wedge \quad \varnothing = \mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ \ \wedge \ \varnothing = \{0\} \cap \mathbb{R}^+ \ \wedge \ \varnothing = \mathbb{R}^- \cap \{0\}.$$

Gráficamente esta situación se puede representar en una recta horizontal, donde a cada punto de la recta se le asocia un número real, los cuales son ordenados de acuerdo a criterios ya conocidos por todos (siguiendo el esquema de los números enteros), partiendo de izquierda a derecha por los negativos, continuando con el cero y finalmente los positivos. Los números se anotan en orden creciente de izquierda a derecha. El $0$ es el punto de simetría entre un número positivo y su inverso aditivo (número negativo) correspondiente. En cada extremo de la recta se agregan además los símbolos $-\infty$ (a la izquierda) y $+\infty$ (a la derecha), los cuales se leen "menos infinito" y "más infinito" respectivamente, con el fin de dar a entender que los números continuan decreciendo o creciendo sin límite (pues de acuerdo al Principio de Arquímides los números reales no poseen cota superior ni cota inferior).




Ahora, de acuerdo a los axiomas y definiciones dados previamente, no es difícil demostrar que en $\mathbb{R}$ la relación "mayor o igual que" constituye una relación de orden; es decir, satisface las siguientes propiedades:

(O4) **Propiedad reflexiva**

$$(\forall a \in \mathbb{R})(a \geqslant a)$$

(O5) **Propiedad antisimétrica**

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \geqslant b \ \wedge \ b \geqslant a \Rightarrow a = b)$$

(O6) **Propiedad transitiva**

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \geqslant b \ \wedge \ b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c)$$

**Demostración.** Sean $a, b$ y $c$ tres números reales cualesquiera. Entonces:

1. Para la reflexividad,

$$a = a \Rightarrow a \geqslant a.$$

2. Para la antisimetría,

$$\begin{aligned}
a \geqslant b \ \wedge \ b \geqslant a &\Rightarrow (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b) \ \wedge \ (b - a \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ b = a) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b) \ \wedge \ a - b \in \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b) \ \wedge \ \ b = a \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b - a \in \mathbb{R}^+) \ \vee \ (a = b \ \wedge \ b - a \in \mathbb{R}^+) \\ \vee \\ (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b = a) \ \vee \ (a = b \ \wedge \ b = a) \end{array} \right. \\
&\Rightarrow (0 \in \mathbb{R}^+) \ \vee \ (a = b) \\
&\Rightarrow a = b.
\end{aligned}$$

3. Para la transitividad,

$$\begin{aligned}
a \geqslant b \ \wedge \ b \geqslant c &\Rightarrow (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b) \ \wedge \ (b - c \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ b = c) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b) \ \wedge \ c - b \in \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = b) \ \wedge \ \ b = c \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b - c \in \mathbb{R}^+) \ \vee \ (a = b \ \wedge \ b - c \in \mathbb{R}^+) \\ \vee \\ (a - b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b = c) \ \vee \ (a = b \ \wedge \ b = c) \end{array} \right. \\
&\Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ a = c \\
&\Rightarrow a \geqslant c. \quad \square
\end{aligned}$$

Cambiando en (O4)–(O6) los signos $\geqslant$ por signos $\leqslant$, tenemos que la relación "menor o igual que" también constituye una relación de orden en $\mathbb{R}$.

### 1.2.1. Otras propiedades de las desigualdades en $\mathbb{R}$

A continuación probaremos algunas propiedades de las desigualdades en$\mathbb{R}$.

1. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a > b \Rightarrow a + c > b + c)$
2. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a > b \ \wedge \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$
3. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a > b \ \wedge \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c)$
4. $(\forall a \in \mathbb{R})(a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0)$
5. $(\forall a \in \mathbb{R})(a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0)$
6. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > b > 0 \Rightarrow b^{-1} > a^{-1})$
7. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > b \geqslant 0 \Rightarrow a^2 > b^2)$

**Demostración.** Sean $a, b$ y $c$ números reales, entonces:

1. $$\begin{aligned} a > b &\Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a + c - c - b) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow [(a + c) - (b + c)] \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a + c > b + c \quad \square \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} a > b \ \wedge \ c > 0 &\Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ c \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a - b) \cdot c \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a \cdot c - b \cdot c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad \square \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} a > b \ \wedge \ c < 0 &\Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ c \in \mathbb{R}^- \\ &\Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ (-c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a - b) \cdot (-c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b \cdot c - a \cdot c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \square \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ & \wedge \qquad a < 0 &\Rightarrow a \in \mathbb{R}^- \\ &\Rightarrow a \cdot a = a^2 \in \mathbb{R}^+ & &\Rightarrow (-a) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a^2 > 0, & &\Rightarrow (-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2 \in \mathbb{R}^+ \\ & & &\Rightarrow a^2 > 0 \quad \square \end{aligned}$$

5. Antes de probar la propiedad, notar que $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$. Ahora probaremos la propiedad por reducción al absurdo, esto es, supondremos que la negación del enunciado es verdadera y llegaremos a una contradicción.

   Supongamos que
$$a > 0 \ \wedge \ a^{-1} \leqslant 0.$$

   Entonces por propiedad 3. tenemos que $a \cdot a^{-1} < 0$, pues $a^{-1} \neq 0$, pero esto es una contradicción con el hecho que $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$. Esto quiere decir que la negación del enunciado es falsa y luego el enunciado es verdadero. $\square$

6.
$$\begin{aligned} a > b > 0 &\Rightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ a^{-1} \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ a^{-1} \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a-b) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} - b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b^{-1} - a^{-1}) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow b^{-1} > a^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} a > b \geqslant 0 &\Rightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ (a+b) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a-b) \cdot (a+b) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (a^2 - b^2) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a^2 > b^2 \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 1.3

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \neq b$, demuestre que $a^2 + b^2 > 2ab$
4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$
5. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$, demuestre que $ac + bd \leq 1$
6. Sean $a, b, m, n \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y $m, n \in \mathbb{R}^+$, demuestre que $b < \dfrac{ma + nb}{m + n} < a$
7. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, demuestre que $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{a+c}{b} > 6$
8. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Pruebe que $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$.

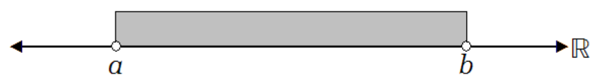
### 1.2.2. Intervalos

Una forma de agradable de escribir y representar ciertos subconjuntos de los números reales que involucran desigualdades en su definición son los intervalos:

1. Llamamos *intervalo abierto* al conjunto:

$$]a,b[:=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$$

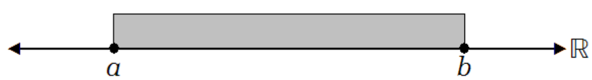
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




2. Llamamos *intervalo cerrado* al conjunto:

$$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}$$

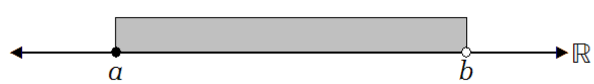
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




3. Llamamos *intervalo semi abierto por derecha* al conjunto:

$$[a,b[:=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x<b\}$$

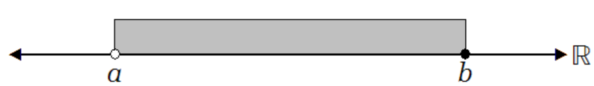
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




4. Llamamos *intervalo semi abierto por izquierda* al conjunto:

$$]a,b]:=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leq b\}$$

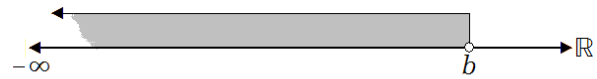
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




5. Llamamos *intervalo infinito abierto por derecha* al conjunto:

$$]-\infty,b[:=\{x\in\mathbb{R}:x<b\}$$

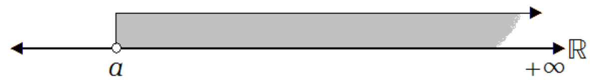
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




6. Llamamos *intervalo infinito abierto por izquierda* al conjunto:

$$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

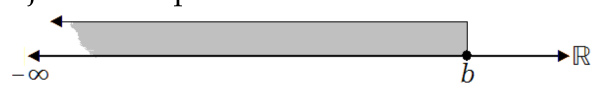
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




7. Llamamos *intervalo infinito cerrado por derecha* al conjunto:

$$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

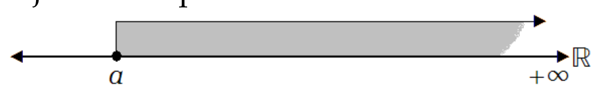
Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




8. Llamamos *intervalo infinito cerrado por izquierda* al conjunto:

$$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Gráficamente, este conjunto se representa en una recta numérica como sigue:




### 1.2.3. Valor absoluto

Sea $a \in \mathbb{R}$. Llamaremos *valor absoluto* de $a$ a un valor real que denotamos por $|a|$ y que definimos como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } \ a > 0, \\ 0 & \text{si } \ a = 0, \\ -a & \text{si } \ -a < 0. \end{cases}$$

Algunas propiedades que verifica el valor absoluto de un número real son las siguientes:

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(|a \cdot b| = |a| \cdot |b|)$
2. $(\forall a, b \in \mathbb{R})\left(b \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}\right)$
3. $(\forall a, b \in \mathbb{R})\big(\big||a|-|b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|\big)$ (Desigualdad triangular)
4. $(\forall a \in \mathbb{R})(|a| = \sqrt{a^2})$ (otra forma de definir valor absoluto)

### 1.2.4. Ecuaciones de segundo grado y ecuaciones radicales

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, se tiene que:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene dos raíces o soluciones distintas dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una raíz real única dada por:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíce reales, tiene raíces complejas conjugadas.

### 1.2.5. Inecuaciones

Sean $p \wedge q$ , expresiones algebraicas , las afirmaciones

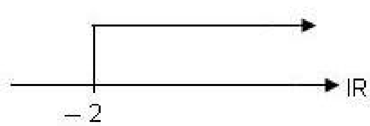
1. $p(x) \leq q(x)$
2. $p(x) \geq q(x)$

se llaman inecuaciones o desigualdades. Si al reemplazar $x$ por un valor , por ejemplo $a$ se obtiene una expresión verdadera, entonces $a$ , recibe el nombre de solución de la inecuación. Resolver una inecuación es determinar el intervalo de números reales para los cuales la desigualdad se satisface. Tal conjunto de números se llama conjunto solución de la inecuación.

EJEMPLO 1.1 Resolver la desigualdad: $5x + 1 > 3x - 3$

**Solución.** $5x + 1 > 3x - 3 \Rightarrow 5x + 1 - (3x - 3) > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 5x + 1 - 3x + 3 > 0 \\ &\Rightarrow 2x + 4 > 0 \\ &\Rightarrow 2x > -4 \\ &\Rightarrow x > -2 \end{aligned}$$



Luego el conjunto solución es : $S = \{x \in \mathbb{R}/x > -2\}$

### 1.2.6. Solución por Intervalos

Una inecuación puede ser resuelta usando la teoría de conjuntos, al final la solución resulta de la intersección o unión de intervalos según corresponda.

EJEMPLO 1.2 Hallar el conjunto solución en la inecuación que satisface las desigualdades: $3x > -9 \wedge 2x \leq x + 5$.

**Solución.** $3x > -9 \Rightarrow x > -3 \wedge 2x \leq x + 5 \Rightarrow x \leq 5$

luego el conjunto solución es : $x \in ]3, 5]\}$.

### 1.2.7. Construcción de tablas

Este método consiste en estudiar el signo $+$ o $-$, en cada uno de los intervalos en una vecindad del punto crítico ( la denominación de punto crítico a los valores anuladores es convencional), luego se efectúa el producto , manteniendo la ley de los signos.

EJEMPLOS 1.2

1. Determinar el conjunto solución de $\frac{x+5}{x(x+1)} \leq 0$

   **Solución.** En primer lugar determinamos los puntos críticos:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x = 0$$

| $factor/intervalo$ | $-\infty < x < -5$ | $-5 < x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+5$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $sol.$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

   Se encuentra que el conjunto solución es: $S = ]-\infty; -5] \cup ]-1; 0[$. $\square$

2. Encontrar el conjunto solución de: $|x^2 - 5x + 5| < 1$

   **Solución.** De acuerdo con la definición de valor absoluto, se tienen dos casos

   *a*) Si $x^2 - 5x + 5 \geq 0$, entonces se resuelve la inecuación : $x^2 - 5x + 5 < 1$
   ordenando y factorizando se tiene: $(x - 4)(x - 1) < 0$,
   donde los puntos críticos son: $x = 4 \wedge x = 1$
   al construir la tabla para analizar el signo se tiene:

   | $factor/intervalo$ | $\infty^- < x < 1$ | $1 < x < 4$ | $4 < x < \infty^+$ |
   |---|---|---|---|
   | $x - 1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
   | $x - 4$ | $-$ | $-$ | $+$ |
   | $sol.$ | $+$ | $-$ | $+$ |

   De acuerdo con esta tabla se observa que el conjunto solución es : $]1, 4[$.

   *b*) Si $x^2 - 5x + 5 < 0$, entonces se resuelve la inecuación : $x^2 - 5x + 5 > -1$
   la que despues de ordenar y factorizar queda: $(x - 3)(x - 2 > 0)$
   donde los puntos críticos son : $x = 3 \wedge x = 2$
   al construir la tabla para analizar el signo se tiene:

   | $factor/intervalo$ | $\infty^- < x < 2$ | $2 < x < 3$ | $3 < x < \infty^+$ |
   |---|---|---|---|
   | $x - 3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
   | $x - 2$ | $-$ | $+$ | $+$ |
   | $sol.$ | $+$ | $-$ | $+$ |

   Finalmente se encuentra que el conjunto solución de la inecuación es: $]1, 2[\cup]3, 4[$. $\square$

EJERCICIOS 1.4 Resuelva las siguientes inecuaciones:

1. $6x - 2 \leq 3x + 10$
2. $2 \leq \frac{4x-2}{3} \leq 6$
3. $\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x-1} \leq 1$
4. $x + 1 > \frac{4x}{x+1}$
5. $x^2 - 2x - 8 < 0$

6. $|x|^2 + 2|x| - 3 \leq 0$

7. $\left|\frac{3x-2}{x+1}\right| > 2$

8. $|x^2 - |3+2x|| < 4$

9. $|x| + |x+2| < 4$

10. $\frac{|x-1|-|2x+3|}{3x-4} \geq 0$

11. Si $x$satisface la desigualdad $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$. Determinar los posibles valores de $y$, cuando $y = 4x - 8$

12. Si $y = 3x + 5$, demostrar que $|x-1| < \frac{1}{10} \Rightarrow |y-8| < \frac{3}{10}$

### 1.2.8. Problemas con enunciado

1. Una Compañía manufactura termostatos. El costo combinado de labor y material es $\$4$ por termostato. El costo fijo que paga la compañía en un mes (gastos de luz, agua, arriendo, etc.) es de $\$60{,}000$. Si el precio de venta de un termostato es de $\$7$, ¿Cuántos termostatos debe vender la compañía para obtener ganancia en un mes?

2. La UNAB está considerando ofrecer un curso de gestión en recursos medioambientales al personal de la compañía ACME. Si éste deja ganancias, se ofrecerá a otras compañías. El curso resulta económicamente factible si se matriculan al menos 30 personas pagando US$\$50$ cada una. La UNAB, pensando en reducir los gastos de costo a cada persona, descontará US$\$1{,}25$ por cada persona que se matricule por sobre los treinta. Como asesor financiero de la UNAB indique el tamaño límite del grupo para que el dinero recibido por matrículas nunca sea menor que el recibido por 30 personas.

3. Un inversionista tiene US$\$8000$ colocados al $9\,\%$ de interés anual y desea invertir más dinero al $16\,\%$ de interés anual a fin de obtener un monto final de al menos $12\,\%$ sobre la inversión total en un año. ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que debe invertir?

4. A los pintores generalmente se les paga por hora o por obra terminada. El salario que reciben puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, suponga que pueden trabajar por US$\$8{,}50$ la hora, o por US$\$300$ más US$\$3$ por cada hora por debajo de 40, si

completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma“t”horas. ¿Para qué valores de “t.el salario por hora es mejor?

5. En biología existe una regla aproximada, llamada regla bioclimática para zonas templadas, que establece que en primavera y a principios de verano, fenómenos periódicos tales como la aparición de insectos y la maduración de frutas, por lo general se demoran alrededor de 4 días más por cada 1500 mts. de altura sobre el nivel del mar, esta regla bioclimática se resume en la siguiente expresión $d = \frac{4n}{1500}$, donde $d =$ *demora en días*; $n =$ *cambio de altura medida en metros*. Si esta regla es válida para $0 \leq n \leq 4000$. Determinar la mínima y la máxima demora para que un fruto madure entre los 1600 y 2300 mts. sobre el nivel del mar.

6. En un pequeño negocio familiar se emplean dos trabajadores que sólo laboran unas horas por semana. La cantidad total de los salarios que pagan a estos empleados varía desde $\$128{,}000$ hasta $\$146{,}000$ por mes. Si un empleado gana $\$18{,}000$ más que el otro, determine las posibles cantidades ganadas mensualmente por cada empleado.

7. Un cliente se dirige a una farmacia y adquiere un paquete de algodón de 125 gramos. El vendedor le manifiesta que es de esperar no recibir un peso exacto de 125 gramos. Suponga que el peso real, “r”(en gramos) de un paquete de algodón marcado como de 125 gramos está dado por $|r - 125| \leq 4$. Si el cliente decide comprar 5 paquetes de algodón. ¿Cuál es la cantidad máxima y mínima de algodón que debe esperar obtener?

8. Se ha establecido que el virus sincicial que ataca preferentemente a los niños, se debe a dos factores: 1) la posibilidad de contagio de acuerdo a la edad del niño, la cual obedece a la fórmula $c(x) = 2x^2 - 5x + 4$; y 2) la disminución de ciertas vitaminas en el organismo, también de acuerdo a su edad, dada por la fórmula $V(x) = x^2 + 6x - 8$. Si se estima que los mayores transtornos producidos por este “virus”se producen cuando la diferencia entre ambos factores es menor que 12 . ¿Cuáles son las edades de mayor riesgo para contraer la enfermedad?

9. Una resistencia de 7 Ohm y una resistencia variable R se instalan en paralelo. La resistencia resultante $R_T = \frac{7R}{7+R}$. Determine los valores de la resistencia variable R para los cuales la resistencia resultante es mayor que 3 Ohm pero menor que 5 Ohm.

10. La suma de dos números es 64 y su diferencia es 16. ¿Cuáles son los números?

11. La diferencia de dos números es a su producto como 1:30. Si la suma de los valores recíprocos de los números es $\frac{2}{15}$. ¿Cuáles son los números?

12. Dos números están en la razón de 5:3. Si se resta 10 del primero y se agrega 10 al segundo, resulta la razón inversa. ¿Cuáles son los números?

13. La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre si como 5:3:16. ¿Cuáles son los números?

14. $10m$ de un género de seda y $12m$ de uno de lana valen, con un $2\,\%$ de descuento, US$207,76; mientras que $4m$ del primer género y $6m$ del segundo, con un $4\,\%$ de descuento, valen US$82,32. ¿Cuál es el precio del metro de cada género?

15. Un objeto compuesto de oro y plata pesa $502g$. Su volumen es de $41cm^3$. Calcular el peso del oro y la plata que contiene el objeto, sabiendo que $1cm^3$ de oro pesa $19g$ y que $1cm^3$ de plata pesa $10,5g$.

16. Dos conductos de agua llenan un depósito, si el primero permanece abierto por $15min$ y el segundo por $18min$. Si el primero se abre por $12min$ y el segundo por $15min$, se alcanza a llenar $\frac{41}{50}$ del depósito. ¿En cuántos minutos se llenaría el depósito por cada uno de los conductos separadamente?

17. Aumentando la base de un triángulo en $6m$ y la altura en $4m$, el área aumenta $120m^2$ y aumentando la base en $2m$ y la altura en $9m$ el área aumenta $160m^2$. Calcular la base y la altura.

18. Sobre la misma hipotenusa se construyen dos triángulos rectángulos. Los catetos del segundo triángulo miden $4m$ menos y $8m$ más, respectivamente, que los catetos correspondientes del primero. El área de segundo triángulo es $66m^2$ mayor que el área del primero. Calcular los catetos del primer triángulo.

19. Un hombre tiene a lo menos 30 años más que su hijo y a lo más 25 años menos que su padre. ¿Qué edad podría tener si entre los tres suman a lo menos 100 años?

20. Un carpinero fabrica cierto número de mesas, vende 70 de ellas y le quedan por vender más de la mitad. Luego fabrica 6 mesas más y vende 36 mesas quedándole menos de 42 mesas por vender. Determinar cuantas mesas fabricó el carpintero

(1)Al menos 20001. (2)El límite es 40 personas. (3)US$6000. (4)Para $t \geq 36{,}52$ (5)Mín: $4{,}2\bar{6}$ días ; Máx: $6{,}1\bar{3}$ días. (6)Entre $\$55{,}000$ y $\$64{,}000$ recibe el que gana menos. (7)Mín: 605$g$; Máx: 645$g$. (8)0-3 años o 8-11 años. (9)$\frac{21}{4}ohm < R < \frac{35}{2}ohm$. (10)(24,40). (11)(20,12). (12)(25,15). (13)(16,4). (14)$14 y $6. (15)Oro: 361$g$ ; Plata: 231$g$. (16)$37{,}5min$ y $30min$. (17)$b = 30m$ ; $h = 16m$. (18)$24m$; $7m$.

## 1.3. Axioma de completitud (*opcional)

1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, es acotado superiormente si existe un número real $M$ tal que $x \leq M, \forall x \in S$, esto es:
   $S$ acotado superiormente $\iff (\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in S)(x \leq M)$

2. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente si existe un número real $m$ tal que $x \geq m, \forall x \in S$, esto es:

$S$ acotado inferiormente $\Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in S)(x \geq m)$
El número $M$ o cualquier otro mayor que él se llama cota superior de $s$. El número $m$ o cualquier otro menor que él se llama cota inferior de $S$.

Sea $S$ un conjunto acotado, se llama supremo de $S$, lo que se anota $\sup(S)$ a la menor de las cotas superiores de $S$ A la mayor de las cotas inferiores se le llama ínfimo de $S$, lo que se anota $\inf(S)$

### 1.3.1. Propiedad característica del supremo

Si $M = \sup(S)$, entonces se debe satisfacer que:

1. $a \leq M$ ,$\forall a \in S$, pues $M$ es cota superior de $S$

2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in S)(k > M - \varepsilon)$, pues $M$ es el supremo de $S$

geométricamente esto es:


si no existiera el número $k$, el número $M$ , no sería el supremo

### 1.3.2. Propiedad característica del ínfimo

Sea $m = \text{ínf}(S)$ , entonces:

1. $a \geq M$ , $\forall a \in S$, pues $m$ es cota inferior de $S$

2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in S)(k < m + \varepsilon)$, pues $m$ es el ínfimo de $S$

Geométricamente esto es:

Si no existe tal $k$ , el número $m$ no sería infimo.

Finalmente el axioma de completitud establece que para $S \subset \mathbb{R}$:

a) Si $S$ está acotado superiormente, entonces $S$ tiene supremo.

b) Si $S$ está acotado inferiormente, entonces $S$ tiene ínfimo

EJEMPLO 1.3 Sea $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+3}{x+2} \leq 0 \right\}$

1. Pruebe que $S$ es un conjunto acotado

2. Demuestre que $\text{ínf}(S) = -3$

**Solución.**

a) $\frac{x+3}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow [(x+3) \geq 0 \wedge (x+2) < 0] \vee [(x+3) \leq 0 \wedge (x+2) > 0]$
$\Leftrightarrow (x \geq -3 \wedge x < -2) \vee (x \leq -3 \wedge x > -2$
$\Leftrightarrow x \in [-3, -2[ \cup \phi$
$\Leftrightarrow S = [-3, -2[$

i) Cotas inferiores de $S = (-\infty, -3] \Rightarrow S$ , es acotado inferiormente

ii) Cotas superiores de $S = [-2, \infty) \Rightarrow S$ , es acotado superiormente. Por lo tanto de i) , ii) se tiene que $S$ es un conjunto acotado.

b) P.D que $m = -3$ es el ínfimo de $S = [-3, -2[$. Esto es :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m = -3 \in \mathbb{R} \ \ /m + \varepsilon > x \ \ \forall x \in S.$$

En particular si $x = -3$, se tiene que $-3 + \varepsilon > -3$. Sea $\varepsilon = 0{,}3 \Longrightarrow -3 + 0{,}3 > -3$, esto es : $-2{,}7 > -3$. Luego, se cumple que $m = -3$ es el ínfimo de $S$.

## Capítulo 2

# Funciones

## 2.1. Preliminares

Antes de introducir el concepto de función examinaremos previamente algunos ideas básicas.

**Variable**: Es un símbolo $(x, y, z, u, ...)$ que representa a un elemento no especificado de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado *universo* de la variable, y cada elemento del conjunto es un posible valor de la variable.

EJEMPLO 2.1 Sea $x$ una variable cuyo universo es el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $x$ puede tomar cualquier valor de los elementos de $A$, esto es ; $x = 1$ , $x = 2$ , $x = 3$ , $x = 4$.

**Constante**: Es un simbolo $(a, b, c, ...k...etc)$ utilizado para designar al elemento de un conjunto que tiene un único elemento, por lo que la constante tiene un valor único.

EJEMPLO 2.2 Si $A = \{2\}$; entonces $x = 2$ , Si $B = \{c\}$ ; entonces $x = c$

**Parámetro**: Además de las variables y las constantes, hay otras cantidades o simbolos que en cada caso particular son constantes, pero que en general funcionan como variables. Estas cantidades reciben el nombre de parámetros y que definen en general una familia de curvas.

EJEMPLO 2.3 Sea $y = ax + b$ , $a$ y $b$ son parámetros, pueden tomar cualquier valor pero en todo caso representa la ecuación de una recta.

**Par ordenado**: Es un conjunto de dos elementos $(x, y)$, que satisfacen una proposición $P_{x,y}$, donde $x$ es la primera componente e $y$ es la segunda componente. En general, el par ordenado $(a, b)$ es diferente al par ordenado $(b, a)$

**Producto cartesiano**:El producto cartesiano entre dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados tales que la primera componente pertenece al conjunto $A$ y la segunda componente pertenece al conjunto $B$, esto se anota:

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$$

**Relación**: Sean $A$ y $B$ conjuntos. Se define una relación $R$ de $A$ en $B$ como cualquier subconjunto de $A$ x $B$.

EJEMPLO 2.4 Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ entonces:

$A \times B$=$\{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (b, 1); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 2); (c, 3)\}$ ,luego :

$R_1, R_2, R_3$ $y$ $R_4$ son relaciones de $A \times B$, donde:

$R_1 = \{(a, 1), (b, 3)\}$

$R_2 = \{(a, 2), (b, 3), (a, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$

$R_3 = \{(c, 1)\}$

$R_4 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 3)\}$

Observe que $R_1, R_2, R_3, R_4$, son subconjuntos de $A \times B$

EJEMPLO 2.5 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ ; $B = \{1, 3, 4, 5\}$; $\mathbb{N}$,

determine por extensión las siguientes relaciones:

$R_1 = \{(x, y)/x + y \text{ es impar}\}$

$R_2 = \{(x, y)/x \text{ es par}\}$

$R_3 = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 8\}$

$R_4 = \{(x, y)/2x + y = 10\}$

**Solución.**

$A \times B$=$\{$ (1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(3,5)$\}$

$R_1 = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 4)\}$

$R_2 = \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (2, 1)\}$

$R_4 = \{(3, 4)\}$

DEFINICIÓN 2.1 Sea $R \subseteq A \times B$=$\{(x, y)/P(x, y)\}$ es una relación entonces:

1. Dominio de la relación: Se anota $Dom\,(R)$ y se define:

$$\text{Dom}\,(R) = \{x \in A/\exists\, y \in B \ tal \ que \ (x, y) \in R\}$$

   Luego el dominio de una relación es el conjunto formado por las primeras componentes de cada uno de los pares ordenados que pertenecen a la relación

2. Recorrido de la relación : Se anota $Rec\,(R)$ y se define:

$$\text{Rec}(R) = \{y \in B / \exists\, x \in A \ \text{ tal que } \ (x, y) \in R\}$$

Luego el recorrido de una relación es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación

3. Relación inversa: Se anota $R^{-1}$ y se define:

$$R^{-1} = \{(x, y)/(y, x) \in R\}$$

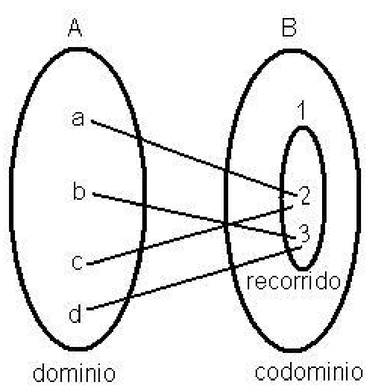
Luego la relación inversa esta formada por los pares ordenados reciprocos de los pares ordenados de $R$

## 2.2. Definiciones de función

DEFINICIÓN 2.2 $f$ es una función entre dos conjuntos $A$ y $B$ si y solo si $f$, es una relación especial entre $A$ y $B$ de modo que todo elemento de $A$ tiene un único elemento correspondiente en $B$

DEFINICIÓN 2.3 Una función $f$ es el conjunto de pares ordenados de tal forma que la primera componente no se repite

DEFINICIÓN 2.4 Sean $A\,, B \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f$, definida en $A$ con valores en $B$, es toda relación subconjunto de $A \times B$ tal que, a cada elemento de $A$ le asigna un único elemento en $B$ gráficamente esto es:



De acuerdo con este esquema tenemos que :
$f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$, $f(d) = 3$
Esto se lee : la imagen de $a$ es 2, la imagen de $b$ es 3, etc,.

EJERCICIOS 2.1 Sea $h = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

1. Indicar si $h$ es función o no

2. Indicar el dominio de $h$

3. Indicar el recorrido de $h$

4. Dar forma o regla de correspondencia como una ecuación que contenga los símbolos $h(x), x$

## 2.3. Propiedades eventuales de las funciones

En algunos problemas que aparecen en matemáticas y otras ciencias nos encontramos que el dominio y el codominio tienen restricciones, de acuerdo a dichas restricciones las funciones se clasifican en :

1. **Función inyectiva**

   Una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si y solo si se satisface la siguiente propiedad:

   $$f(a) = f(b) \Rightarrow (a) = (b)$$

2. **Función epiyectiva**

   Una función $f : A \rightarrow B$ es epiyectiva si y solo si se satisface la siguiente propiedad:

   $$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

3. **Función biyectiva**

   Una función $f : A \rightarrow B$ , es biyectiva si y solo si:
   i) $f$ es inyectiva
   ii) $f$ es epiyectiva

EJEMPLO 2.6 Sean $A = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\}$; $B = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\}$; $f : A \to B$, definida por

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}.$$

Verificar que la función es:

1. inyectiva
2. epiyectiva

**Solución.**

Primero verificaremos si la función es inyectiva, para ello aplicamos la definición de inyectividad, esto es:

i)
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$
$$f(a) = \frac{a-3}{2a+1} \;\; ; \;\; f(b) = \frac{b-3}{2b+1}$$

igualando ambas expresiones se tiene:

$$\frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1}$$
$$(a-3)(2b+1) = (b-3)(2a+1)$$
$$2ab + a - 6ab - 3 = 2ab + b - 6ab - 3$$

agrupando terminos semejantes se tiene que : $a = b$, luego la función es inyectiva.

En segundo lugar se verifica si la función es epiyectiva:

ii)
$$\begin{aligned} b = \frac{a-3}{2a+1} &\Rightarrow b(2a+1) = a-3 \\ &\Rightarrow 2ab - a = -3 - b \\ &\Rightarrow a(2b-1) = -3 - b \\ &\Rightarrow a = \frac{3+b}{1-2b} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{3+b}{1-2b}\right) = \frac{\frac{3+b}{1-2b} - 3}{2\left(\frac{3+b}{1-2b}\right) + 1} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{3+b}{1-2b}\right) = \frac{\frac{3+b-3+6b}{1-2b}}{\frac{6+2b+1-2b}{1-2b}}. \end{aligned}$$

agrupando terminos semejantes y simplificando se encuentra que:

$$f(a) = b$$

luego la función es epiyectiva.

De i) e ii) se concluye que la función es biyectiva. $\square$

## 2.4. Función inversa

Sea $f : A \rightarrow B$, una función biyectiva. Se llama *función inversa* de $f$ a la función $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que a cada elemento $b \in B$, le hace corresponder el único elemento $a \in A$, de tal manera que $f(a) = b$

EJEMPLO 2.7 Sean $A = \{2, 4, 6\}\,; B = \{1, 5, 9\}$ y $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 2x - 3$, hallar $f^{-1}(x)$ **Solución.**
Se observa que

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$
$$f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$$
$$f(6) = 2 \cdot 6 - 3 = 9$$

debemos encontrar si es que existe una función $f^{-1}(x)$ tal que :

$$f^{-1}(1) = 2$$
$$f^{-1}(5) = 4$$
$$f^{-1}(9) = 6$$

para ello procedemos de la siguiente forma:
Sea $y = 2x - 3$, de esta expresión despejamos $x$ en función de $y$, lo que nos queda:

$$x = \frac{y+3}{2}$$

, haciendo el cambio de variables correspondiente nos entrega la expresión que buscamos, esto es:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

Verificación de la expresión obtenida:

$$f^{-1}(1) = \frac{1+3}{2} = 2$$

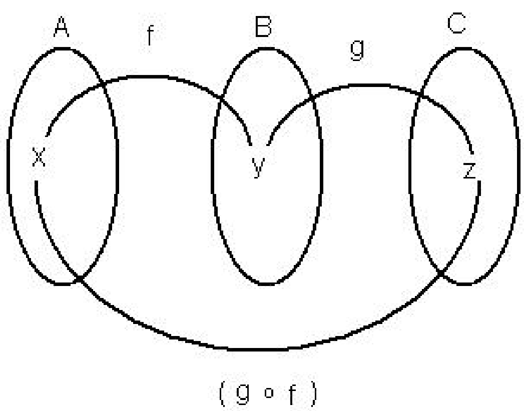
$$f^{-1}(5) = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$f^{-1}(9) = \frac{9+3}{2} = 6$$

lo que comprueba el resultado esperado

## 2.5. Función compuesta

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. La función $g \circ f : A \to C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se llama función compuesta de $f$ y $g$. Graficamente esto es:




EJEMPLO 2.8 Sean $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 5x^2 + 4$, hallar

1. $(f \circ g)(x)$

2. $(g \circ f)(x)$

**Solución.**

1.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(5x^2 + 4) \\ &= 3(5x^2 + 4) + 2 \\ &= 15x^2 + 14\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(3x+2) \\ &= 5(3x+2)^2+4 \\ &= 5(9x^2+12x+4)+4 \\ &= 45x^2+60x+24\end{aligned}$$

Se observa que, en general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

EJERCICIOS 2.2

1. Considere la función biyectiva $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ tal que $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ determine $f^{-1}(x)$

2. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ;definida por $f(x) = x^2 - 2x$ encontrar:

   *a*) $f(1)$ ; $f(0)$ ; $f(-2)$

   *b*) $f(1-\sqrt{3})$ ; $f(2m)$ ; $f(m+n)$ ; $2f(m+n^2)$

3. Considere la función $f(t) = t^2 + t - 6$ ; $t \in \mathbb{R}$ determinar:

   *a*) La imagen de $-2$

   *b*) Las primagenes de 0

   *c*) Las primagenes de -10

4. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

   *b*) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-9x}$

   *c*) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{x-1}$

5. Sean $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ , $g(x) = -x^2 + 5x - 3$ hallar

   *a*) $f(2)$ ; $f(-1)$ , $f(-2)$ ,$g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

   *b*) $f(f(1))$ ; $g(g(-2))$ ; $f(x) \cdot g(x)$

   *c*) Si $h(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ , hallar $f(x) + 3g(x) - h(x)$

6. Si $p(x) = \dfrac{3}{x+1}$ ; $q(x) = \dfrac{b}{x^2}$ ; $r(x) = \dfrac{3x^2}{2+x^2}$ , si $(p \circ q) = r(x)$ encuentra el valor de $b$

7. Dado $f(x) = ax + b$ y $(f \circ f \circ f)(x) = 64x + 21$ encuentra los valores de $a$ y $b$

8. Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ,hallar $f(f(f(x)))$

9. Si $f(x-1) = x^2$ hallar $f(x+1)$

10. Si $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ resolver para $x$ la ecuación $f(1-x) = 2$

11. Considere las funciones $f, g$ tales que $f(x) = x^2$ , $g(x) = ax + 1$ , $a > 0$, con dominio real apropiado para que ambas sean biyectivas, si $(f^{-1} \circ g^{-1})\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ determine $(g \circ f)(-2)$

12. Dadas las funciones en $\mathbb{R}$ : $f(x) = 2x^2 - 3x + m$ y $g(x) = 3x + 1$. Para que valor de de $m \in \mathbb{R}$ existe un único $\mathbb{R}$ $x$ tal que : $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

## 2.6. Funciones reales

Las funciones vistas haste el momento en general se llaman "aplicaciones "
El termino función corresponde al caso en que $A$ y $B$ son conjuntos numéricos que es el caso de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,llamadas funciones reales. Como estas pueden representarse en el sistema cartesiano, resultan de gran utilidad a la hora de visualizar propiedades de las funciones tales como paridad, monotonía, acotamiento, etc. Agreguemos tambien que una función puede venir dada por una tabla, una fórmula matemática, un gráfico , etc. En una función distinguimos los siguientes elementos o características:

1. Dominio de la función : $Dom(f)$=$\{x \in \mathbb{R} / \exists\, y \in \mathbb{R}\, tal\ \ que\, y = f(x)\}$

2. Recorrido de la función : $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists\, x \in \mathbb{R}\, tal\, que\, y = f(x)\}$

3. Ceros de la función: $\{x \in Dom(f) / f(x) = 0\}$

4. Gráfico de la función: $Graf(f) = \{(x, f(x)) / x \in Dom(f)\}$

5. $f$ es una función par si:$f(-x) = f(x)\, \forall\, x, -x \in Dom(f)$

6. $f$ es una función impar si: $f(-x) = -f(x) \forall\, x, -x \in Dom(f)$

7. $f$ es creciente en $A \Longleftrightarrow x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\,, \forall x_1\,, x_2 \in A$

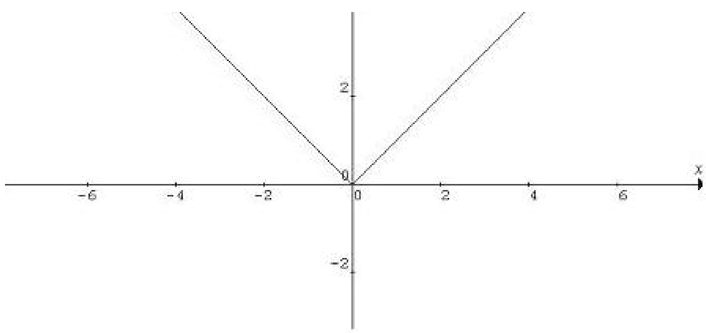
8. $f$ es decreciente en $A \Longleftrightarrow x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\, \forall x_1\,, x_2 \in A$

9. $f$ es periódica de período $p \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow f(x+p) = f(x)\, \forall x,\ x+p \in Dom(f)$

   Con esta información analicemos algunas funciones de uso habitual.

### 2.6.1. Función Valor absoluto

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ \ x > 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$
se llama función valor absoluto , su gráfica es :




El dominio de la función es $\mathbb{R}$
El recorrido de la función es $\mathbb{R}^+ \cup 0$
Se observa que es una función par, ya que: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$
Sea $I_1 = ]-\infty, 0[\ \ , I_2 = ]0, \infty[$, entonces:

*a*) La función valor absoluto es decreciente en $I_1$

*b*) La función valor absoluto es creciente en $I_2$

La función esta acotada inferiormente por el eje $x$
Su único cero es $x = 0$

### 2.6.2. Funciones polinomiales

Son aquellas que responden a la forma general:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

donde $a_n, a_{n-1}, .., a_0$ son números reales o complejos, llamados coeficientes. Ejemplos :
$f(x) = 3x^6 + 5x^4 + 2x$ es una función polinomial de grado 5
$f(x) = \sqrt{2}x - 5x^2 + 2$ es una función polkinomial de grado 2
$f(x) = 5\sqrt{x} - x^3$ no es una función polinomial ya que $n = \dfrac{1}{2}$
El dominio de todas las funciones polinomiales es el conjunto de todos los reales.
El recorrido de una función polinomial depende de $n$, si este es par o impar y del valor del coeficiente $a_n$, esto es:

*a*) Si $a_n > 0$ y $n$ es par, entonces el recorrido es el intervalo $[m, \infty[$, siendo $m$ el mínimo valor de la función. Por ejemplo, con $a_n = 1$ ; $n = 2$ se tiene la parábola $y = x^2$, que satisface esta propiedad. $m = 0$

*b*) Si $a_n < 0$ y $n$ es impar, el recorrido es el intervalo $]-\infty, M]$ , siendo $M$ el máximo valor de la función. Por ejemplo, con $a_n = -1, n = 2$ se tiene la parábola $y = -x^2$, que satisface esta propiedad. $M = 0$

*c*) Si $n$ es impar , entonces el recorrido es el intervalo $] - \infty, \infty[$. En este caso la función no tiene valor mínimo ni máximo. Por ejemplo con $n = 3$ se tiene la parábola $y = x^3$, que satisface esta propiedad.

Casos particulares de la función polinomial son la función constante, la lineal , la cuadrática.

### 2.6.3. Función constante

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = K$ se llama función constante, donde $K \in \mathbb{R}$ , $\forall x \in \mathbb{R}$. Sus características son:

*a*) Dom $(f) = \mathbb{R}$

*b*) Rec $(f) = K$

*c*) Ceros de $f = \phi \vee \mathbb{R}$

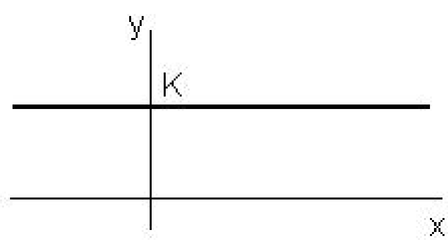
*d*) Graf $(f) = \{(x, K)/x \in \mathbb{R}\}$

*e*) $f$ es par ya que $f(-x) = f(x) = K$

*f*) $f$ no es creciente ni decreciente

*g*) $f$ periódica de período p ya que $f(x + p) = f(x) = K$

Geométricamente es una recta paralela al eje de las $x$,esto es :




### 2.6.4. Función lineal

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$, con $a, b$, constantes, $a \neq 0 \, \forall x, a, b \in \mathbb{R}$, sus características son:

*a*) Dom $f = \mathbb{R}$

*b*) Rec $f = \mathbb{R}$

*c*) Ceros de $f = -\dfrac{a}{b}$, ya que $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

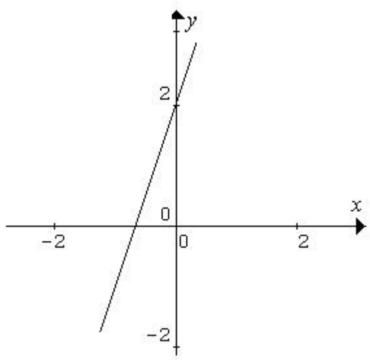
*d*) La función lineal no es par ni impar, ya que:
i) $f(-x) = -ax + b \neq f(x) = ax + b$
ii) $f(-x) = -ax + b \neq -f(x) = -ax - b$

*e*) Si $a > 0 \Rightarrow f$ es creciente, esto porque:
Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, por demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$
$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Si $a > 0 \Rightarrow f$, es decreciente, esto porque:
Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, por demnostrar que $f(x_1) > f(x_2)$
$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

*f*) La función lineal no es periódica.

*g*) Graf $f = \{(x, y)/y = ax + b, x \in \mathbb{R}\}$
eso es:




### 2.6.5. Función cuadrática

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c$ constantes, $a \neq 0$ se llama función cuadrática sus características son:

*a*) Dom$(f) = \mathbb{R}$, ya que $\forall x \in \mathbb{R}$ ,$\exists y = ax^2 + bx + c \ \in \mathbb{R}$

*b*) Rec$(f) = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ Aquí debemos considerar dos casos:

1) Si $a > 0 \Rightarrow$ Rec$f = \left\{y \in \mathbb{R}/y \geq c - \dfrac{b^2}{4a}\right\}$

2) Si $a < 0 \Rightarrow$ Rec $f = \left\{y \in \mathbb{R}/y \leq c - \dfrac{b^2}{4a}\right\}$

Esto es:
$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + (c - y) = 0$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c - y}{a}\right) = 0$$

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c-y}{a}$ completando cuadrados se tiene

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c-y}{a}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4a(c-y)}{4a^2}$, luego al despejar $x$ se tiene:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}$ analizando esta expresión se tiene

Si $b^2 \geq 4a(c-y)$ entonces se tiene que:

$a > 0 \Rightarrow y \geq c - \frac{b^2}{4a}$

y $\quad a > 0 \Rightarrow y \leq c - \frac{b^2}{4a}$

*c*) Ceros de $f = \{x \in \mathbb{R}/y = 0\}$

De $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

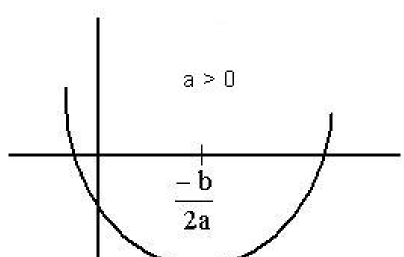
luego:

1) si $b^2 - 4ac < 0$, entonces ceros de $f = \phi$

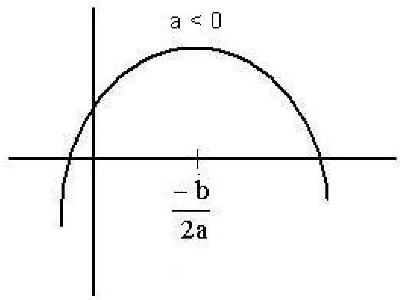
2) si $b^2 - 4ac > 0$, entonces ceros de $f = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; ; \; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$

*d*) La función cuadrática no es par ni impar

*e*) Consideremos la siguiente gráfica



;




2)

Sean $I_1 = \left]\infty^-, -\frac{b}{2a}\right[ ; I_2 = \left] -\frac{b}{2a}, \infty\right[$, entonces se prsentan los siguientes casos:

1) $a > 0 \Rightarrow \begin{cases} i)\ f \quad es\, decreciente\ en\ I_1 \\ ii)\ f \quad es\ \ creciente\ \ en\ \ I_2 \end{cases}$

2) $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} i)\ f \quad\ es\ \ creciente\ en\ I_1 \\ ii)\ f \quad es\ \ decreciente\ en\ I_2 \end{cases}$

**Observaciones respecto de la función cuadrática**

Si $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ; $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , son ceros de la función:
$f(x) = ax^2 + bx + c\ a, b, c \in \mathbb{R}\ , a \neq 0$ entonces:

*a*) $x_1 + x_2 = -\frac{c}{a}$

*b*) $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

*c*) Si $a < 0$, entonces: $f$ tiene un máximo en $x = -\frac{b}{2a}$

*d*) Si $a > 0$, entonces $f$ tiene un mínimo en $x = -\frac{b}{2a}$

*e*) El número real $\frac{4ac - b^2}{4a}$ , es el valor máximo ó mínimo dependiendo del coeficiente $a$.

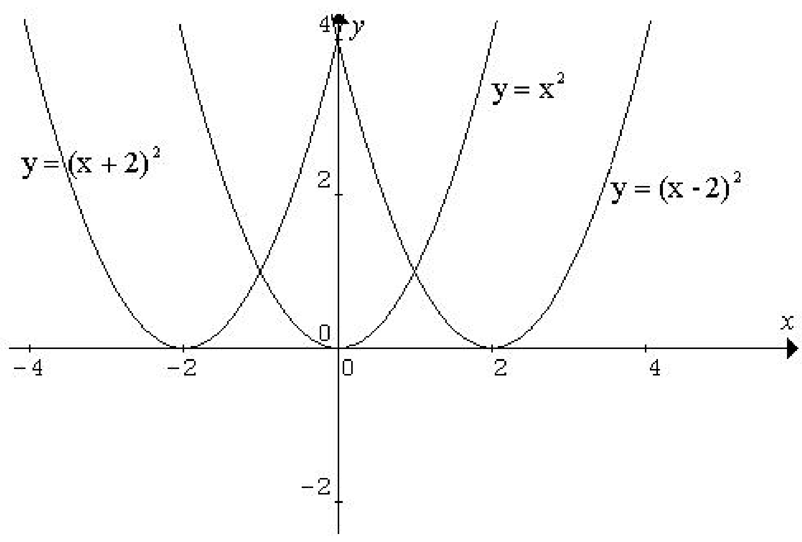
*f*) Al punto $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, se le llama vértice de la parábola

## 2.6.6. Transformaciones

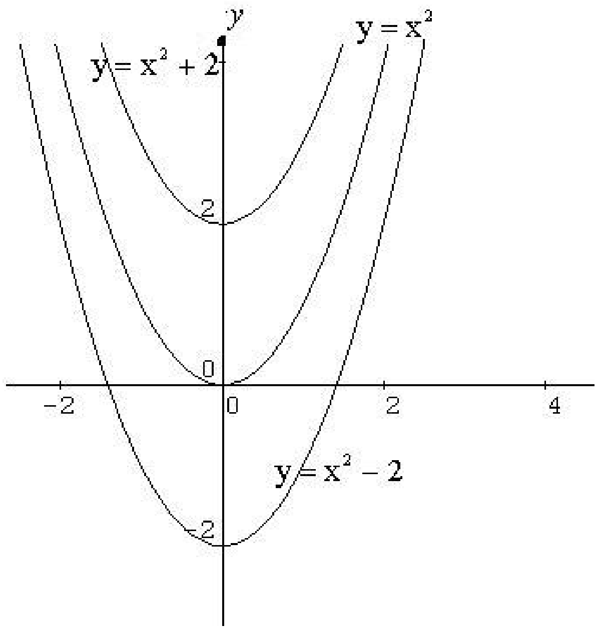
Existen dos transformaciones básicas que permiten describir gráficamente una familia de curvas, estas son las traslaciones y las reflexiones. Estas transformaciones se presentan en el siguiente esquema.

| | |
|---|---|
| Gráfica original: | $y = f(x)$ |
| Traslación $k$ unidades a la derecha | $y = f(x - k)$ |
| Traslación $k$ unidades a la izquierda | $y = f(x + k)$ |
| Traslación $k$ unidades hacia abajo | $y = f(x) - k$ |
| Traslación $k$ unidades hacia arriba | $y = f(x) + k$ |
| Reflexión en el eje $x$ | $y = -f(x)$ |

EJEMPLO 2.9 Función original. $y = x^2$




EJEMPLO 2.10 Función original $y = x^2$




### 2.6.7. Funciones Racionales

Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, entonces la función $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $g(x) \neq 0$, se llama función racional. Para efectos de graficar esta función se debe considerar la busqueda de ceros, sus indeterminaciones, las intersecciones con los ejes y un elemento importante lo costituyen las asíntotas.Estas son rectas que limitan las curvas, pero sin intersectarlas, para su determinación se analizan los numeradores y denominadores de la función, tanto en terminos de $x$ como de $y$.

Las asíntotas verticales se obtienen en : $f(x, y) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{N_x}{D_x}$; si $D_{(x_1)} = 0$, , entonces $x_1$, es una asíntota vertical.

Las asíntotas horizontales se obtienen en: $f(x, y) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{N_y}{D_y}$ si ,$D_{y_1} = 0$ , entonces $y_1$, es una asíntota horizontal.

EJEMPLO 2.11 Sea $f(x, y) = y - \dfrac{x-1}{x-2} = 0$

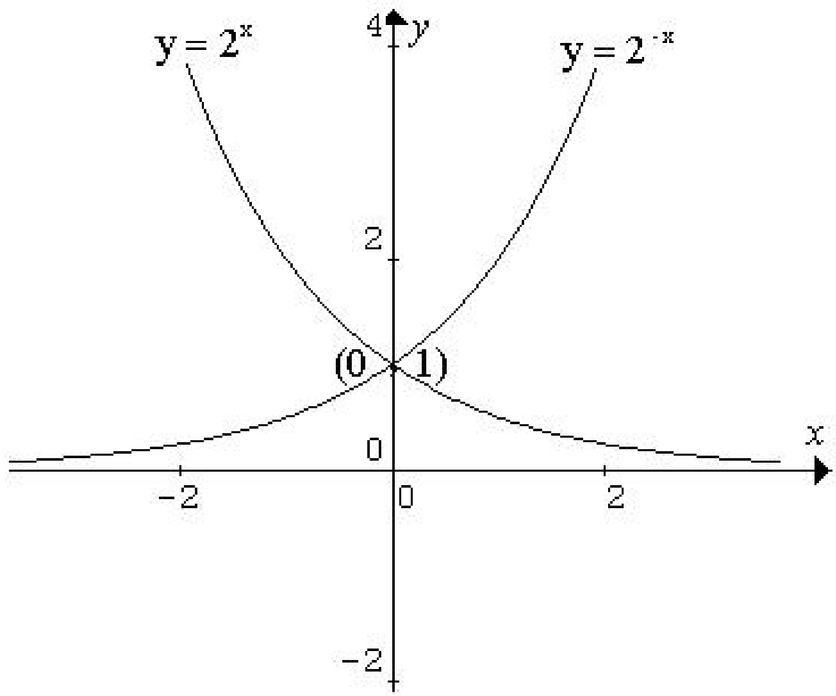
Despejando $x, y$ respectivamente se obtiene:

$y = \dfrac{x-1}{x-2} \Rightarrow x = 2$ , es una asíntota vertical

$x = \dfrac{2y-1}{y-1} \Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal gráficamente:

### 2.6.8. Función exponencial

Sea $a > 0, a \neq 1$. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = a^x$ se llama función exponencial de base $a$.Para un mejor entendimiento de la función exponencial consideremos $a = 2$ esto es: $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 2^{-x}$,lo que graficamente es:




Como la base es mayor que la unidad a medida que $x$ crece, la función exponencial crece sin cota, no hay ceros , esto es , la curva no cruza al eje $x$.Si $x$ crece negativamente, entonces la curva se aproxima al eje $x$ teniendolo como asíntota horizontal. Cuando $x$=0 la curva corta al eje $y$ en el punto (0,1).
De la gráfica de la función exponencial se puede deducir que es biyectiva, esto quiere decir que la función exponencial admite inversa. Por otra parte si $a > 1$, la función exponencial es creciente, y si $0 < a < 1$, entonces es decreciente, en cualquier caso ella admite inversa.

Existe una gran variedad de problemas de aplicación relacionado con la función exponencial, antes de tomar en consideración esta aplicaciones es conveniente recordar como se resuelve una ecuación exponencial

EJEMPLO 2.12

$$4^x - 3^{(x-1/2)} = 3^{(x+1/2)} - 2^{(2x-1)}$$

$$2^{2x} + 2^{2x} \cdot 2^{-1} = 3^x \cdot 3^{1/2} + 3^x \cdot 3^{-1/2}$$

$$2^x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x(3^{1/2} + 3^{-1/2})$$

$$2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\left(\frac{2^2}{(\sqrt{3})^2}\right)^x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

EJEMPLO 2.13

$$9^{x+1} - 3^x = 6534$$

$$9^x \cdot 9 - 3^x = 6534$$

$$9 \cdot 3^{2x} - 3x - 65345 = 0$$

usando incógnita auxiliar $3^x = t$ tenemos

$$9t^2 - t - 6534 = 0$$

resolviendo la ecuación cuadrática se encuentra que:

$$t_1 = 27\,;\; t_2 = -\frac{484}{18}$$

$$3^x = 27\,;\; 3^x = -\frac{484}{18}$$

de estas ecuaciones se desprende que sólo es solución del problema $x = 3$

### 2.6.9. Función logaritmo

Sea $a > 0$, $a \neq 1$, la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \log_a x$, se llama función logaritmo en base $a$ Se observa que como operación entre las formas exponencial y logarítmica se tiene que: $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$.
Las funciones exponencial $f(x) = a^x$ y logaritmo $g(x) = \log_a x$ son inversas.

**Demostración**
Debemos probar que la función compuesta, en ambos sentidos, es la identidad. Sean $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ , entonces:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(a^x) = \log_a a^x = x$$

Cuando $a = 10$ la función logaritmo de base 10, se denomina logaritmo decimal, lo que se anota:

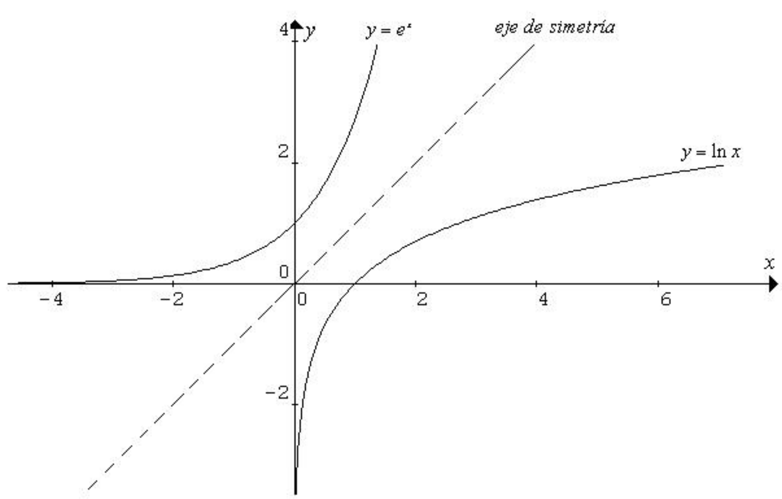
$$y = \log_{10} x = \log x$$

. Cuando $a = e$ la función logaritmo de base $e$, se denomina logaritmo natural, lo que se anota:

$$y = \log_e x = \ln x$$

.

Graficamente las funciones exponencial y logaritmo se representan por:



Se observa su simetría respecto de la recta $y = x$

**Propiedades de** $y = e^x$

*a*) Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}$

*b*) Recorrido:$\forall y > 0$

*c*) Es una función creciente

*d*) Es una función biunívoca, esto es: Si $e^{x_1} = e^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$

*e*) $0 < e^x < 1$ , para $x < 0$
$e^0 = 1$
$e^x > 1$ para $x > 0$

*f*) $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$

*g*) $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$

*h*) $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 \cdot x_2}$

*i*) $e^{\ln x} = x$

*j*) Ecuación de la asíntota horizontal $y = 0$

**Propiedades de** $y = \ln x$

*a*) Dominio $\forall x > 0$

*b*) Recorrido $\mathbb{R}$

*c*) Es una función creciente

*d*) Es una función biunivoca, esto es : Si $\ln x_1 = \ln x_2$ entonces $x_1 = x_2$

*e*) $\ln x < 0$ para $0 < x < 1$
$\ln 1 = 0$
$\ln x > 0$ para $x > 1$

*f*) $\ln x_1 \cdot x_2 = \ln x_1 + \ln x_2$

*g*) $\ln \left( \dfrac{x_1}{x_2} \right) = \ln x_1 - \ln x_2$

*h*) $\ln (x_1)^{x_2} = x_2 \cdot \ln x_1$

*i*) $\ln e^x = x$

*j)* Ecuación de la asíntota vertical $x = 0$

**Observación**:Las propiedades del logaritmo en base 10 son las mismas que las del logaritmo natural

EJEMPLO 2.14 Resolver la ecuación:

$$x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$$

$$\log 10^x + \log(1 + 2^x) = \log 5^x + \log 6$$

recuerde que $\log_a a = 1$ y que $\log_a a^n = a$

$$\log[10^x(1 + 2^x)] = \log(5^x \cdot 6)$$

recuerde que $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

$$10^x(1 + 2^x) = 5^x \cdot 6$$

$$(2 \cdot 5)^x(1 + 2^x) = 5^x \cdot 6$$

$$2^x \cdot 5^x(1 + 2^x) = 5^x \cdot 6$$

$$2^x(1 + 2^x) = 6$$

$$2^x + (2^x)^2 = 6$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$$

$$(2^x + 3)(2^x - 2) = 0$$

$$2^x = -3 \Longrightarrow \ no\, existe\, tal\, x\, en\, \mathbb{R}$$

$$2^x = 2^1 \Longrightarrow x = 1$$

EJEMPLO 2.15 Si $\log_8 3 = M$ y $\log_5 = N$ demuestre que $\log 6 = \dfrac{3M + 1}{3MN + 1}$
**Solución.**

$$\log 6 = \frac{3 \log_8 3 + 1}{3 \log_8 3 \cdot \log_3 5}$$

$$= \frac{3\dfrac{\log 3}{\log 8} + 1}{3\dfrac{\log 3}{\log 8} \cdot \dfrac{\log 5}{\log 3} + 1}$$

$$= \frac{3\log 3 + \log 8}{3\log 5 + \log 8}$$
$$= \frac{3\log 3 + 3\log 2}{3[\log 10 - \log 2] + 3\log 2}$$
$$= \frac{\log 3 + \log 2}{\log 10} = \log 6$$

EJEMPLO 2.16 Una sustancia radiactiva se desintegra ( y se convierte en otro elemento químico) de acuerdo con la fórmula: $y = Ae^{-0,2x}$ donde $y$ es la cantidad remanente despues de $x$ años.

1) Si tenemos una cantidad inicial $A = 80\ gr$.¿Qué cantidad quedará despues de 3 años?
2) La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en descomponerse la mitad de la misma. Encuentre la vida media de esta sustancia en la que $A = 80\ gr$

**Solución.**
Como $A = 80$ tenemos que: $y = 80e^{-0,2x}$ luego se requiere resolver esta ecuación cuando $x = 3$

$$y = 80e^{-0,2x}$$
$$y = 80e^{-0,2(3)}$$
$$y = 80e^{-0,6}$$
$$y = 80(0{,}549)$$
$$y = 43{,}920$$

Luego despues de tres años hay 43.9 gramos de la sustancia
Para el cálculo de la vida media se tiene:

$$40 = 80e^{-0,2x}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-0,2x}$$
$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-0,2x}$$
$$-0{,}2x = -\ln 2$$
$$x = \frac{\ln 2}{0{,}2}$$

$$x = 3{,}465$$

Luego la vida media es aproximadamente 3.465 años

**Ejercicios** Encuentre $x$ en :

1) $x^{x^3} = 3$
2) $\log_{\sqrt[15]{27}} 3\sqrt[9]{9} = \sqrt{47 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x}}}}$
3) Resuelva: $\log_{\sqrt{a}81} \cdot \log_a 81 \cdot \log_{a\sqrt{a}} 81 \cdot \log_{a^2} 81 = \dfrac{32}{3}$
4) Encuentre la solución de: $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$
5) Encuentre $x$ si: $2[\log_4(x)]^2 + 3\log_4(x) - 2 = 0$
6) Sean $f(x) = \log_3(x^2-1) - 2\log_9(x-1$ y $g(x) = \Big(\dfrac{1}{3}\Big)^x - 1$ verificar que $(g \circ f)(x) = -\dfrac{x}{x+1}$
7) El valor de reventa de un equipo radiográfico se comporta de acuerdo con la función: $v(t) = 750000e^{-0{,}05t}$
   - $a'$ Determinar el valor original del equipo radiográfico
   - $b'$ Determinar el valor esperado de reventa despues de 5 años
   - $c'$ Indicar despues de cuantos años el valor de reventa será $250000$

# Parte II

# Límites y Continuidad

Capítulo 3

# Límites

## 3.1. Discusión informal de los límites laterales de una función

En el ámbito matemático la expresión *límite lateral de una función real* debe entenderse como sinónima de *valor frontera de una función* o valor al cual se está aproximando una función cuando su variable se está aproximando a un determinado valor real, digamos $r$, ya sea mediante valores mayores que $r$, o mediante valores menores que $r$. Observemos los siguientes ejemplos para entender mejor esta idea:

EJEMPLO 3.1 Sea $f(x) = x + 1$.

i) ¿A qué valor se va aproximando $f(x)$ cuando $x$ se va aproximando a $1$ por la *izquierda* en la recta real (esto es, por valores *menores* que $1$)?

ii) ¿A qué valor se va aproximando $f(x)$ cuando $x$ se va aproximando a $1$ por la *derecha* en la recta real (esto es, por valores *mayores* que $1$)?

Recurrimos a una tabla de valores y a nuestra intuición para responder estas preguntas:

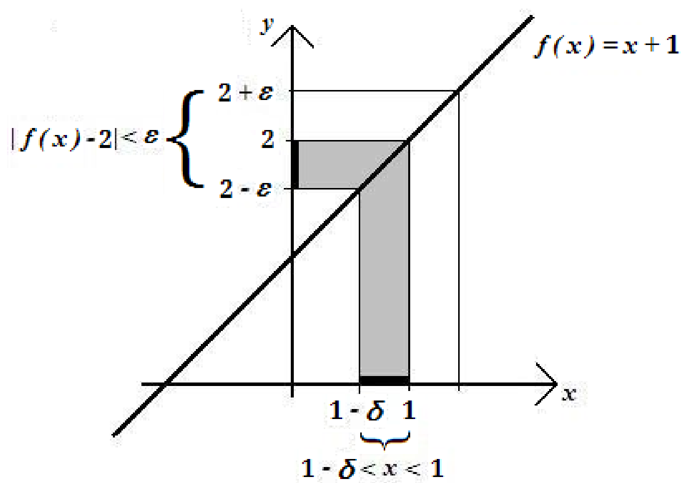
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,9 | 1,9 |
| 0,99 | 1,99 |
| 0,999 | 1,999 |
| 0,9999 | 1,9999 |
| 0,99999 | 1,99999 |
| ... | ... |
| $x$ se aprox. a 1, $x < 1$. | $f(x)$ se aprox. a 2. |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,1 | 2,1 |
| 1,01 | 2,01 |
| 1,001 | 2,001 |
| 1,0001 | 2,0001 |
| 1,00001 | 2,00001 |
| ... | ... |
| $x$ se aprox. a 1, $x > 1$. | $f(x)$ se aprox. a 2. |

Entonces tenemos:
*Para i)* "El valor al que se aproxima $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $1$, mediante valores *menores* que $1$, es $2$" y denotamos esto como sigue

$$\lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$$

Aquí la expresión $x \to 1^-$ indica que nos aproximamos a $1$ por el lado izquierdo en la recta real ($x < 1$) y matemáticamente leemos así: "Límite lateral izquierdo de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $1$ por la *izquierda* es $2$".
Ahora, con el objetivo de dar una interpretación analítica del concepto de límite lateral izquierdo, es conveniente hacer un análisis gráfico de la función. Consideremos un valor $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño de manera que, para valores de $x$ próximos a $1$, pero menores que $1$, la diferencia entre la función y su límite sea menor que $\varepsilon$ (y por lo tanto tan pequeña como deseemos); es decir estamos en la situación $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Observemos cuidadosamente el siguiente gráfico




El gráfico nos dice que: dado un valor arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, es posible determinar un valor $\delta > 0$ tal que si la variable $x$ es mayor que $1 - \delta$ y menor que $1$, entonces la diferencia entre la función y su límite lateral izquierdo es menor que el valor $\varepsilon > 0$ dado.
En símbolos tenemos para $f(x) = x + 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

que es equivalente a decir que

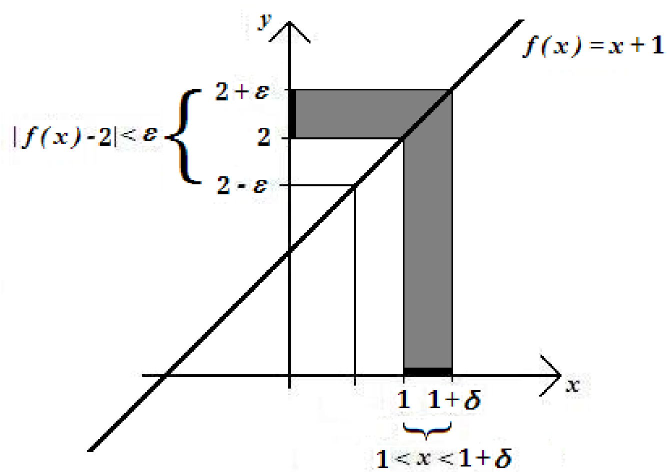
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \text{ tal que } (1 - \delta < x < 1 \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon).$$

*Para ii)* "El valor el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $1$, mediante valores *mayores* que $1$, es $2$" y denotamos esto como sigue

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

Aquí la expresión $x \to 1^+$ indica que nos aproximamos a $1$ por el lado derecho en la recta real ($x>1$) y matemáticamente leemos así: "Límite lateral derecho de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $1$ por la *derecha* es $2$".

Ahora, con el objetivo de dar una interpretación analítica del concepto de límite lateral derecho, es conveniente estudiar el gráfico de la función. Consideremos un valor $\varepsilon>0$ arbitrariamente pequeño de manera que, para valores de $x$ próximos a $1$, pero mayores que $1$, la diferencia entre la función y su límite sea menor que $\varepsilon$ (y por lo tanto tan pequeña como deseemos); es decir estamos en la situación $|f(x)-2|<\varepsilon$. Observemos cuidadosamente el siguiente gráfico




El gráfico nos dice que: dado un valor arbitrariamente pequeño $\varepsilon>0$, es posible determinar un valor $\delta>0$ tal que si la variable $x$ es mayor que $1$ y menor que $1+\delta$, entonces la diferencia entre la función y su límite lateral derecho es menor que el valor $\varepsilon>0$ dado. En símbolos tenemos para $f(x)=x+1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

que es equivalente a decir que

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ \text{tal que}\ (1<x<1+\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon). \quad \square$$

EJEMPLO 3.2 Sea $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

i) ¿A qué valor se va aproximando $f(x)$ cuando $x$ se va aproximando a $0$ por la *izquierda* (esto es, por valores *menores* que $1$)?

ii) ¿A qué valor se va aproximando $f(x)$ cuando $x$ se va aproximando a $0$ por la *derecha* (esto es, por valores *mayores* que $1$)?

Recurrimos a una tabla de valores y a nuestra intuición para responder estas preguntas:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -0,1 | 2,1 |
| -0,01 | 2,01 |
| -0,001 | 2,001 |
| -0,0001 | 2,0001 |
| -0,00001 | 2,00001 |
| ... | ... |
| $x$ se aprox. a 0, $x < 0$. | $f(x)$ se aprox. a 2. |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,1 | 1 |
| 0,01 | 1 |
| 0,001 | 1 |
| 0,0001 | 1 |
| 0,00001 | 1 |
| ... | ... |
| $x$ se aprox. a 0, $x > 0$. | $f(x)$ se aprox. a 1. |

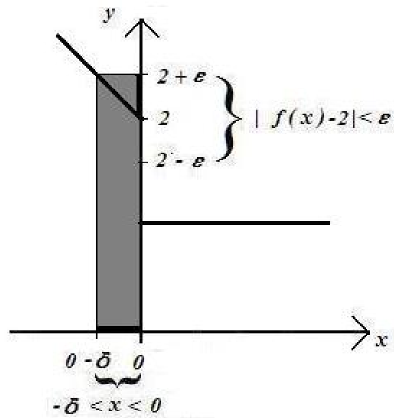
Entonces tenemos:

*Para i)* "El valor al que se aproxima $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $0$, mediante valores *menores* que $0$, es $2$" y denotamos esto como sigue

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

Aquí la expresión $x \to 0^-$ indica que nos aproximamos a $0$ por el lado izquierdo en la recta real ($x < 0$) y matemáticamente leemos así: "Límite lateral izquierdo de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $0$ por la *izquierda*, es $2$".

Ahora, con el objetivo de dar una interpretación analítica del concepto de límite lateral izquierdo, es conveniente hacer un análisis gráfico de la función. Consideremos un valor $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño de manera que, para valores de $x$ próximos a $0$, pero menores que $0$, la diferencia entre la función y su límite sea menor que $\varepsilon$ (y por lo tanto tan pequeña como deseemos); es decir estamos en la situación $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Observemos cuidadosamente el siguiente gráfico




El gráfico nos dice que: dado un valor arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, es posible determinar un valor $\delta > 0$ tal que si la variable $x$ es mayor que $0 - \delta$ y menor que $0$, entonces la diferencia entre la función y su límite lateral izquierdo es menor que el valor $\varepsilon > 0$ dado.
En símbolos tenemos para $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

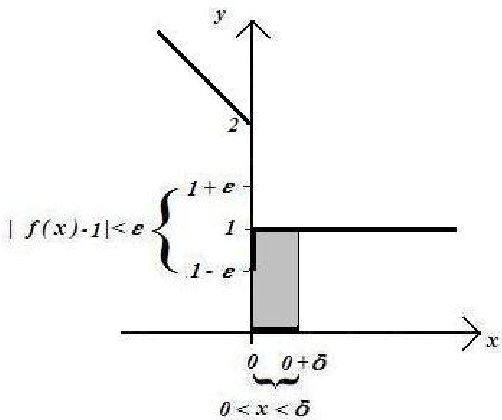
que es equivalente a decir que

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \text{ tal que } (0 - \delta < x < 0 \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon).$$

*Para ii)* "El valor al que se aproxima $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $0$, mediante valores *mayores* que $0$, es $1$." y denotamos esto como sigue

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Aquí la expresión $x \to 0^+$ indica que me aproximo a $0$ por el lado derecho en la recta real ($x > 0$) y matemáticamente leemos así: "Límite lateral derecho de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $0$ por la *derecha* es $1$".
Ahora, con el objetivo de dar una interpretación analítica del concepto de límite lateral derecho, es conveniente hacer un análisis gráfico de la función. Consideremos un valor $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño de manera que, para valores de $x$ próximos a $0$, pero mayores que $0$, la diferencia entre la función y su límite sea menor que $\varepsilon$ (y por lo tanto tan pequeña como deseemos); es decir estamos en la situación $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Observemos cuidadosamente el siguiente gráfico




El gráfico nos dice que: dado un valor arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, es posible determinar un valor $\delta > 0$ tal que si la variable $x$ es mayor que $0$ y menor que $0+\delta$, entonces la diferencia entre la función y su límite lateral derecho es menor que el valor $\varepsilon > 0$ dado. En símbolos tenemos para $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

que es equivalente a decir que

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \text{ tal que } (0 < x < 0+\delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon). \quad \square$$

EJERCICIOS 3.1 Con ayuda de una tabla de valores, calcule intuitivamente los límites laterales que se le solicitan para cada una de las siguientes funciones

$$a)\ f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}, \quad \lim_{x\to -2^-} f(x);\ \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$b)\ f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x);\ \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$c)\ f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x);\ \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x);\ \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

## 3.2. Definición del límite de una función a través de límites laterales

DEFINICIÓN 3.1 Sea $f$ una función real definida en $]a,b[$, salvo tal vez para $c \in\ ]a,b[$.

1. Decimos que un número real $L^-$ es el *límite lateral izquierdo de* $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $c$ *por la izquierda,* si

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta_\varepsilon > 0) \text{ tal que } \big(c-\delta < x < c \Longrightarrow \left|f(x) - L^-\right| < \varepsilon\big)$$

   y escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L^-.$$

2. Decimos que un número real $L^+$ es el *límite lateral derecho de* $f(x)$ cuando $x$ se aproxima *por la derecha,* si

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta_\varepsilon > 0) \text{ tal que } \big(c < x < c+\delta \Longrightarrow \left|f(x) - L^+\right| < \varepsilon\big)$$

   y escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L^+.$$

3. Decimos que un número real $L$ es el *límite de* $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $c$, si:

   *i)* $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L^-$

   *ii)* $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L^+$

   *iii)* $L^- = L^+ = L$,

   y escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

OBSERVACIÓN 3.1 La Definición de Límite se puede escribir como sigue: un número real $L$ es el *límite de* $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $c$, si

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta_\varepsilon > 0) \text{ tal que } (0 < |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

y escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

En efecto,

($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ dado. Si $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$, entonces $(\exists\delta_1 = \delta_{1\varepsilon} > 0)$ tal que

$$(c-\delta_1 < x < c \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \Leftrightarrow (-\delta_1 < x - c < 0 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \tag{3.2.1}$$

Por otra parte, si $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$, entonces $(\exists\delta_2 = \delta_{2\varepsilon} > 0)$ tal que

$$(c < x < c+\delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \Leftrightarrow (0 < x - c < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)\,. \tag{3.2.2}$$

Escojamos ahora el valor mínimo entre $\delta_1$ y $\delta_2$, digamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Notemos que cuando reeplazamos $\delta$ por $\delta_1$ y $\delta_2$ respectivamente en (3.2.1) y (3.2.2), las relaciones allí escritas permanecen válidas. Es decir, para el valor $\varepsilon$ dado inicialmente tenemos que $\exists\delta > 0$ tal que:

$$-\delta < x - c < 0 \quad \wedge \quad 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

o equivalentemente

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Es directo, siguiendo un sentido inverso a lo expuesto previamente. $\square$

OBSERVACIÓN 3.2 Si el límite (o límite lateral) existe, entonces es único.
*En efecto,*

Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to c} f(x) = L_2$, entonces para $\varepsilon > 0$ dado:

$$\begin{aligned} \exists\delta_1 &> 0 \text{ tal que } \left(0 < |x - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \exists\delta_2 &> 0 \text{ tal que } \left(0 < |x - c| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Entonces para $|x - c| < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene

$$0 \leq |L_1 - L_2| = |f(x) - L_2 + L_1 - f(x)| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es decir

$$(0 \leq |L_1 - L_2| < \varepsilon)\,(\forall\varepsilon > 0)\,,$$

y por definición de ínfimo no queda más posibilidad que $|L_1 - L_2| = 0$, o equivalentemente, que $L_1 = L_2$. $\square$

EJEMPLO 3.3 Sea $c$ un valor real fijo. Usando la definición de límite pruebe que:

$$\lim_{x\to a} c = c \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Solución:** Sea $\varepsilon > 0$ dado y pongamos $f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Debemos probar que

$$\exists\delta > 0 \quad \text{tal que} \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Notemos que

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, basta escoger cualquier valor $\delta > 0$ y entonces tendremos que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon. \quad \square$$

EJEMPLO 3.4 Sea $c$ un valor real fijo. Usando la definición de límite pruebe que:

$$\lim_{x \to a} x = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Solución:** Sea $\varepsilon > 0$ dado y pongamos $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Debemos probar que

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - x| < \varepsilon).$$

Notemos que

$$|f(x) - a| = |x - a|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, si escogemos $\delta = \varepsilon$ tendremos que:

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad \square$$

EJEMPLO 3.5 Sea $c$ un valor real fijo. Usando la definición de límite pruebe que:

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Solución:** Sea $\varepsilon > 0$ dado y pongamos $f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Debemos probar que

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a^2| < \varepsilon).$$

Notemos que

$$|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x + a||x - a|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En este momento necesitamos acotar la expresión $|x + a|$ y para esto procedemos como sigue: fijamos un valor real conveniente y ponemos

$$|x - a| < 1 \Rightarrow -1 + a < x < 1 + a \Rightarrow -1 + 2a < x + a < 1 + 2a \Rightarrow |x + a| < 1 + |2a|.$$

Entonces, si escogemos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+|2a|}\right\}$, tendremos que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a^2| < \varepsilon. \quad \square$$

EJEMPLO 3.6 Usando la definición de límite pruebe que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x + 1}{x - 2} = -4.$$

**Solución:** Sea $\varepsilon > 0$ dado y pongamos $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Debemos probar que

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-4)| < \varepsilon).$$

Notemos que

$$|f(x)-(-4)| = \left|\frac{3x+1}{x-2}+4\right| = \left|\frac{7x-7}{x-2}\right| = 7\left|\frac{x-1}{x-2}\right| = \frac{7}{|x-2|}|x-1|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En este momento necesitamos acotar la expresión $\frac{7}{|x-2|}$ y para esto procedemos como sigue: fijamos un valor real conveniente y ponemos

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+1 < x < \frac{1}{2}+1 \Rightarrow \frac{1}{2}-2 < x-2 < \frac{3}{2}-2 &\Rightarrow -\frac{3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2} < 0 \\ &\Rightarrow -2 < \frac{1}{x-2} < -\frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \frac{14}{3} < \frac{7}{|x-2|} < 14. \end{aligned}$$

Entonces, si escogemos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{14}\right\}$, tendremos que:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-(-4)| < \varepsilon. \quad \square$$

EJERCICIOS 3.2 Usando la definición $\varepsilon - \delta$ del límite de una función, demuestre que:

1. $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = 9$
2. $\lim\limits_{x\to a}|x| = |a|$
3. $\lim\limits_{x\to 3}(7-x^2) = -2$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1} = -2$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+3} = -\dfrac{1}{4}$

## 3.3. Propiedades de los límites

TEOREMA 3.1 **[Teorema Álgebra de Límites]**
Sean $f, g$ dos funciones reales definidas en $]a,b[$, salvo tal vez para $c \in\, ]a,b[$. Supongamos que

$$\exists \lim_{x\to c} f(x) \quad \wedge \quad \exists \lim_{x\to c} g(x).$$

Específicamente, consideremos

$$\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\exists \lim_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right), \quad \exists \lim_{x\to c}\left(f(x)-g(x)\right), \quad \exists \lim_{x\to c}\left(k\cdot f(x)\right) \quad \wedge \quad \exists \lim_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right).$$

Si además $B \neq 0$, entonces también

$$\exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Más particularmente,

1. El límite de la suma es la suma de los límites:
$$\lim_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right) = A + B$$
2. El límite de la resta es la resta de los límites:
$$\lim_{x\to c}\left(f(x)-g(x)\right) = A - B$$
3. El límite del producto con un escalar es el escalar por el límite:
$$\lim_{x\to c}\left(k\cdot f(x)\right) = k\cdot A$$
4. El límite del producto es el producto de los límites:
$$\lim_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right) = A\cdot B$$
5. Si $B \neq 0$, el límite del cuociente es el cuociente de los límites:
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

OBSERVACIÓN 3.3 Todos los límites en el teorema pueden ser reemplazados por los correspondientes límites laterales.

EJERCICIOS 3.3

1. Calcule los siguientes límites:
$$a)\lim_{x\to a}x^3 \qquad b)\lim_{x\to a}\left(|x|+b\right) \qquad c)\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x+b};\ \text{para } a\neq b.$$
2. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ para
$$a)f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x>2 \\ x+3 & \text{si } x\le 2\end{cases} \qquad b)f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>2 \\ x-3 & \text{si } x\le 2\end{cases}.$$

## 3.4. Teoremas sobre algunos Límites relevantes

En esta sección omitimos las demostraciones pues no tenemos las herramientas matemáticas necesarias para realizarlas al alcance de nuestra mano, sin embargo necesitamos estos resultados para calcular límites de una forma más rápida y sencilla que hacer una tabla de valores y usar nuestra intuición, o bien usar la definición formal del límite con $\varepsilon - \delta$.

TEOREMA 3.2 **[Teorema sobre Límites de Polinomios y Funciones Radicales]**

1. Sea $p$ un polinomio. Entonces
$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$
2. Sea $f$ una función tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y sean $m, n \in Z, n \neq 0$. Entonces
$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}},$$
siempre que $L^{\frac{m}{n}} \in R$. En otro caso el límite no está definido.

TEOREMA 3.3 **[Teorema sobre Límites de Funciones Exponenciales, Logarítmicas y Trigonométricas]**
Sea $f(x) = e^{ax+b}$ ó $f(x) = \log_a(bx+c)$ ó $f(x) = \text{sen}\,(ax+b)$ ó $f(x) = \cos(ax+b)$. Entonces
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ para } x_0 \in Dom(f).$$

TEOREMA 3.4 **[Teorema sobre Algunos Límites Especiales]**

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

## 3.5. Algunas Técnicas para calcular Límites

En general, las siguientes técnicas se usan para calcular límites sobre todo cuando el reemplazo directo no procede.

### 3.5.1. Simplificación

Se usa en caso de que el denominador es cero cuando uno trata de hacer un reemplazo directo.

EJERCICIOS 3.4 Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^2-x-2} \qquad b)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4} \qquad c)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{6x^2+7x-5}{2x^2+x-1}.$$

### 3.5.2. Racionalización

Se usa en caso de que el denominador es cero cuando uno trata de hacer un reemplazo directo. Se puede racionalizar en el numerador o en el denominador, según convenga.

EJERCICIOS 3.5 Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \qquad c)\ \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

### 3.5.3. Sustitución

Se usa para facilitar el cálculo de un límite pasando a alguna forma de límite conocido o al cual se le puede aplicar alguna otra técnica.

EJERCICIOS 3.6 Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \qquad c)\ \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen} 5\theta}.$$

### 3.5.4. Uso de identidades trigonométricas

Se hacen los arreglos necesarios para usar las identidades trigonométricas y entonces obtener alguna forma de límite conocido o al cual se le puede aplicar alguna otra técnica.

EJERCICIOS 3.7 Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta} \qquad b)\ \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad c)\ \lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\frac{\pi}{2}-\theta}.$$

### 3.5.5. Uso de límites especiales

Se hacen los arreglos necesarios para usar los límites especiales acompañados de alguna forma de límite conocido o al cual se le puede aplicar alguna otra técnica.

EJERCICIOS 3.8 Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} \qquad b)\ \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^{-1} \qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x^3\left(e^x-1\right)}{\left(1-\cos\left(2x\right)\right)^2}.$$

## 3.6. Límites al infinito

Observemos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.7 Sea $f(x)=\frac{1}{x}$.

i) ¿A qué valor se va aproximando $f(x)$ cuando $x$ se va aproximando a $0$ por la *izquierda* (esto es, por valores *menores* que $0$)?

ii) ¿A qué valor se va aproximando $f(x)$ cuando $x$ se va aproximando a $0$ por la *derecha* (esto es, por valores *mayores* que $0$)?

Recurrimos a una tabla de valores y a nuestra intuición para responder estas preguntas:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -1 | -1 |
| -0,01 | -100 |
| -0,0001 | -10000 |
| -0,000001 | -1000000 |
| -0,00000001 | -100000000 |
| ... | ... |
| x se aprox. a 0, $x<0$. | $f(x)$ decrece sin límite. |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 0,01 | 100 |
| 0,0001 | 10000 |
| 0,000001 | 1000000 |
| 0,00000001 | 100000000 |
| ... | ... |
| $x$ se aprox. a 0, $x>0$. | $f(x)$ crece sin límite. |

Entonces tenemos:
*Para i) $f(x)$ decrece sin límite cuando $x$ tiende a $0$ por la izquierda* y denotamos esto como sigue

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

*Para ii)* $f(x)$ *crece sin límite cuando* $x$ *tiende a* $0$ *por la izquierda* y denotamos esto como sigue

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

DEFINICIÓN 3.2 Sea $f$ una función real definida en ]a,b[, salvo tal vez para $c \in ]a, b[$.

1. Decimos que $f(x)$ *crece sin límite cuando* $x$ *tiende a* $c$ *por la derecha* si:

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (c < x < c + \delta \Longrightarrow f(x) > N).$$

   En este caso escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty.$$

2. Decimos que $f(x)$ *decrece sin límite cuando* $x$ *tiende a* $c$ *por la derecha* si:

$$(\forall N \in \mathbb{Z}^-)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (c < x < c + \delta \Longrightarrow f(x) > N).$$

   En este caso escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty.$$

3. Decimos que $f(x)$ *crece sin límite cuando* $x$ *tiende a* $c$ *por la izquierda* si:

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (b - \delta < x < b \Longrightarrow f(x) > N).$$

   En este caso escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty.$$

4. Decimos que $f(x)$ *decrece sin límite cuando* $x$ *tiende a* $c$ *por la izquierda* si:

$$(\forall N \in \mathbb{Z}^-)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (c - \delta < x < c \Longrightarrow f(x) > N).$$

   En este caso escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty.$$

5. En el caso (1), (2), (3) ó (4) la línea recta vertical $x = c$ es llamada *asíntota vertical de la gráfica de* $f$.

OBSERVACIÓN 3.4 Por simplicidad es usual decir que $f$ tiene límite infinito positivo en (1) ó (3) y que $f$ tiene límite infinito negativo en (3) ó (4), pero debe aclararse que esta verbalización indica un comportamiento de la función, ya que por definición de límite, los límites en (1), (2), (3) y (4) *no existen*.

TEOREMA 3.5 Si $r$ es cualquier entero positivo, entonces

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

EJERCICIOS 3.9 Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^5} \qquad c)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} \qquad d)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$$

TEOREMA 3.6
Sean $f, g$ dos funciones definidas en $]a, b[$, salvo tal vez para $c \in ]a, b[$. Si

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to c} g(x) = k,$$

donde $k$ es una constante distinta de $0$, entonces tenemos que

1. Si $k > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

2. Si $k > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

3. Si $k < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

4. Si $k < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

OBSERVACIÓN 3.5 Todos los límites en el teorema pueden ser reemplazados por los correspondientes límites laterales.

EJERCICIOS 3.10

1. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{(x-3)^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} \qquad c)\ \lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} \tan\theta \qquad d)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1}$$

2. Encontrar las asíntotas verticales de las siguientes funciones, si es que existen:

$$a)\ f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} \qquad b)\ f(x) = \frac{x-1}{x^3-1} \qquad c)\ f(x) = \frac{x}{x^5-5}$$

TEOREMA 3.7
Sean $f, g$ dos funciones definidas en $]a,b[$, salvo tal vez para $c \in ]a,b[$. Entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to c} g(x) = k,$$

donde $k$ es una constante cualquiera, entonces

$$\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \pm\infty.$$

OBSERVACIÓN 3.6 Todos los límites en el teorema pueden ser reemplazados por los correspondientes límites laterales.

EJERCICIOS 3.11 Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 3^-} \left[\frac{3}{(x-3)^3} + \frac{1}{x}\right] \qquad b)\ \lim_{x\to 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right] \qquad c)\ \lim_{\theta\to \pi^-} \left[\tan\theta + \cot\theta\right]$$

TEOREMA 3.8
Sean $f, g$ dos funciones definidas en $]a,b[$, salvo tal vez para $c \in ]a,b[$. Si

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to c} g(x) = k,$$

donde $k$ es una constante distinta de cero, entonces

1. $k > 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \pm\infty.$
2. $k < 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \mp\infty.$

OBSERVACIÓN 3.7 Todos los límites en el teorema pueden ser reemplazados por los correspondientes límites laterales.

EJERCICIOS 3.12 Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 2^+} \left[\frac{4}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+3}\right] \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^4} \cdot \frac{2}{x-5}\right]$$

$$c)\ \lim_{x\to 2^-} \left[\frac{\sqrt{4+x^2}}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+3}\right] \qquad d)\ \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{1-x} \cdot \frac{2}{x-5}\right]$$

## 3.7. Límites en infinito

Ahora nos interesa encontrar el comportamiento de una función $f$ en intervalos abiertos no acotados. En particular, nos interesa conocer un valor hacia el cuál se aproxima $f(x)$ cuando $x$ crece ilimitadamente ($x$ se aproxima a $+\infty$), o cuando $x$ decrece ilimitadamente ($x$ se aproxima a $-\infty$.

DEFINICIÓN 3.3
Sea $f$ una función definida en un intervalo del tipo $]a, +\infty[$. Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) \text{ tal que } (x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

entonces decimos que $L$ es el *límite de* $f(x)$ *cuando* $x$ *crece ilimitadamente* y escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

OBSERVACIÓN 3.8 La expresión "$x$ crece ilimitadamente" puede reemplazarse por "$x$ tiende a infinito positivo".

DEFINICIÓN 3.4
Sea $f$ una función definida en un intervalo del tipo $]-\infty, b[$. Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M < 0) \text{ tal que } (x < M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

entonces decimos que $L$ es el *límite de* $f(x)$ *cuando* $x$ *decrece ilimitadamente* y escribimos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

OBSERVACIÓN 3.9 La expresión "$x$ decrece ilimitadamente" puede reemplazarse por "$x$ tiende a infinito negativo".

OBSERVACIÓN 3.10 El Teorema Álgebra de Límites se mantiene válido cuando reeplazamos "$x \to c$" por "$x \to +\infty$" o "$x \to -\infty$".

TEOREMA 3.9
Si $r$ es cualquier entero positivo, entonces

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0.$

OBSERVACIÓN 3.11 En el infinito también se pueden considerar definiciones formales para "límites infinitos", tales como:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Recuerde que en cualquiera de estos casos el límite *no existe*, pues sólo se trata de una expresión matemática que indica el tipo de comportamiento de la función para valores de $|x|$ cada vez más grandes. En estos casos podemos usar los criterios de límites al infinito, pero no el Teorema de Álgebra de Límites.

EJERCICIOS 3.13 Calcular los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-3}{2x+5}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$ $c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$ $e)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$ $f)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-x^2}{3x+5}$

DEFINICIÓN 3.5

La recta $y = L$, $L \in \mathbb{R}$ recibe el nombre de *asíntota horizontal* de la gráfica de $f$ si $L$ satisface al menos una de las siguientes aseveraciones:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ y a partir de cierto número positivo $M$, $f(x) \neq M$, $\forall x > M$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ y a partir de cierto número negativo $M$, $f(x) \neq M$, $\forall x < M$.

EJERCICIOS 3.14 Hallar, si existen, las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

$a)$ $f(x) = \dfrac{3x-5}{\sqrt[3]{2x^3-x^2+1}}$, $x \in \text{Dom } f$ $b)$ $f(x) = \dfrac{6x^3+3x^2-8}{7x^4+16x^2+2}$, $x \in \text{Dom } f$

TEOREMA 3.10 **[Teorema Algunos Límites Especiales]**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, si $|a| < 1$.

EJERCICIOS 3.15 Calcular los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{bx}\right)^{cx}$, $|b| > 1, c > 0$ $b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+2)^{2x}}{9^{2x-1}}$ $d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x(x+1)}{5^x(3x+2)}$

jhzxguygdcuyg

DEFINICIÓN 3.6 La gráfica de la ecuación $y = f(x)$ tiene a la recta $y = mx + b$, $m \neq 0$, como *asíntota oblicua* si se satisface al menos una de las siguientes aseveraciones:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ y a partir de un número positivo $M$, $f(x) \neq mx + b$, $\forall x > M$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ y a partir de un número negativo $M$, $f(x) \neq mx + b$, $\forall x < M$.

EJERCICIOS 3.16 Encontrar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^2}{x-2} \qquad b) f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2} \qquad b) f(x) = \frac{4x^3 + 5}{-6x^2 - 7x}$$

hasta aqui

EJERCICIOS 3.17

fhviuviurviu

Capítulo 4

# Continuidad

## 4.1. Continuidad de una función

DEFINICIÓN 4.1 Sea $f$ una función real definida en un intervalo [a,b].

1. Decimos que $f$ es *continua en* $c \in ]a,b[$ si:

   *i)* $\exists \lim\limits_{x\to c} f(x)$

   *ii)* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

   En caso contrario decimos que $f$ es *discontinua* en $c$.

2. Decimos que $f$ es *continua por la derecha de* $c \in [a,b[$ si:

   *i)* $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$

   *ii)* $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$.

3. Decimos que $f$ es *continua por la izquierda de* $c \in ]a,b]$ si:

   *i)* $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

   *ii)* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$.

OBSERVACIÓN 4.1 Se deduce desde las definiciones anteriores que $f$ es continua en $c \in ]a,b[$ si:

*i)* $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$

*ii)* $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

*iii)* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$.

OBSERVACIÓN 4.2 Una función es continua en un intervalo $]a, b[$ si ella es continua en cada $c \in ]a, b[$.

DEFINICIÓN 4.2 Una discontinuidad en un punto $a$ de una función $f$ que se puede eliminar redefiniendo la función en el punto, de modo que $f$ quede continua en $a$, recibe el nombre de discontinuidad *reparable o evitable*. Si la discontinuidad en el punto $a$ no se puede eliminar, decimos que la discontinuidad es *irreparable o no evitable*.

TEOREMA 4.1
Supongamos que $\exists \lim\limits_{x\to c} f(x)$ y que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{h\to 0} f(c+h) = L \iff \lim_{x\to c}(f(x) - L) = 0$$

EJERCICIOS 4.1

1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones, en el valor indicado:

   *a*) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ e^{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

   *b*) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5}{10x+20} & \text{si } x \neq -2 \\ \frac{3}{5} & \text{si } x = -2 \end{cases}$ en $x = -2$

2. Analizar las discotinuidades en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones. Indique cuales son reparables y cuales no. Justifique adecuadamente.

   *a*) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x-6}$

   *c*) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$ *d*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

## 4.2. Propiedades de las funciones continuas

TEOREMA 4.2 **[Teorema Álgebra de Funciones continuas]**

Sean $f, g$ dos funciones reales con dominio común $D$. Sea $a \in D$ y supongamos que $f$ y $g$ son continuas en $a$. Entonces:

$$f+g, \quad f-g \quad \wedge \quad f \cdot g \text{ son continuas en } a.$$

Si además $g(a) \neq 0$, entonces

$$\frac{f}{g} \text{ es continua en } a.$$

TEOREMA 4.3 **[Teorema Algunas Funciones Continuas]**
Las siguientes funciones son continuas: $f(x) = \text{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = p(x)$, con $p(x)$ un polinomio, $f(x) = \ln x$ , $\quad x > 0$ y $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$, con $n, m \in \mathbb{N}$ y $x \in \text{Dom}(f)$.

TEOREMA 4.4 **[Teorema Límites y Funciones Continuas]**
Si $f$ es una función real continua en $L \in \mathbb{R}$ y si $g$ es una función real tal que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. Entonces

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big) = f(L).$$

TEOREMA 4.5 **[Teorema Composición de Funciones Continuas]**
Sean $f, g$ dos funciones reales tales que $\text{Rec}(g) \subset \text{Dom}(f)$. Si $a \in \text{Dom}(g)$ es tal que $g$ es continua en $a$ y $f$ es continua en $g(a) \in \text{Rec}(g)$; entonces $f \circ g$ es continua en $a$.

EJEMPLOS 4.1

1. $f(x) = e^x + \text{sen} x$ es una función continua en $\mathbb{R}$ pues $e^x$ y $\text{sen} x$ lo son en $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \tan x$ es una función continua en $\mathbb{R} \setminus \{\frac{n}{2}\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ pues $\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$; $\text{sen} x$ y $\cos x$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ y $\cos x \neq 0$ para todo $x \neq \frac{n}{2}\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$
3. $f(x) = \text{sen}\big(\log x\big)$ es una función continua en $\mathbb{R}^+$, pues es la compuesta de las funciones continuas $\text{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, y $\log x$, $x > 0$.

EJERCICIOS 4.2

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de discontinuidad en un punto, indique si ella es reparable o no, y repárela de ser posible:

   $a)\, f(x) = \cos(x^2 - 5x + 2)$ $\qquad b)\, f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$ $\qquad c)\, f(x) = \frac{\text{sen}(3x+7)}{e^x - 1}$

   $$d)\, f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(2x)}{\text{sen}(3x)} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 7x^2 - 3x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad e)\, f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. Determine los valores de $\alpha$ y $\beta$, si existen, para que la función $f$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$a) f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ \beta & \text{si } x > 4 \end{cases} \qquad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \alpha \frac{x^3-1}{x-1} + \beta & \text{si } x < 1 \\ 2\alpha x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \beta \frac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}[(1-\alpha)x]}{x} & \text{si } x < 0 \\ \beta(x-\alpha)^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\operatorname{sen}[(x-1)\alpha]}{\ln x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

## 4.3. Dos teoremas importantes

TEOREMA 4.6 **[Teorema del Sandiwch]**
Sean $f, g$ y $h$ funciones reales definidas en $]a, b[$, salvo tal vez en $c \in ]a, b[$. Supongamos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda $x \neq c$. Supongamos también que

$$\exists \lim_{x \to c} f(x), \quad \exists \lim_{x \to c} h(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Entonces

$$\exists \lim_{x \to c} g(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \to c} g(x) = L.$$

EJERCICIOS 4.3

1. Sea $g$ una función real tal que $|g(x) - 2| \leq 3(x^2-1)^2$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Encontrar, si es posible, $\lim_{x \to 1} g(x)$.

2. Usando el Teorema del Sandiwch, encuentre los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} \qquad b) \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad c) \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

3. Dada una función real $f$ tal que $-\operatorname{sen} x < f(x) < 2 + \operatorname{sen} x$ para toda $x \in ]-\pi, 0[$, determine el valor de $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

4. Sea $f$ una función real tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in ]-a, a[ \setminus \{0\}$, donde $M$ es una constante positiva. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$.

TEOREMA 4.7 **[Teorema del Valor Intermedio]**
Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada número $k$ entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

EJERCICIOS 4.4 Determine si el Teorema del Valor Intermedio es válido para el valor $k$ dado. Si el teorema se cumple, encuentre un número $c$ tal que $f(c) = k$. si el teorema no es válido, dé la razón.

1. $f(x) = 2 + x - x^2; \quad [a, b] = [0, 3]; \quad k = 1.$
2. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}; \quad [a, b] = [0, 3]; \quad k = 3.$
3. $f(x) = \frac{4}{x+2}; \quad [a, b] = [-3, 1]; \quad k = \frac{1}{2}.$

## 4.4. Criterio para máximos y mínimos absolutos

DEFINICIÓN 4.3 Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, donde $I$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

*i)* Si existe $s \in I$ tal que
$$\sup_{x \in I} f(x) = f(s)$$
decimos que $f(s)$ es un *máximo absoluto* de $f$ en $I$.

*ii)* Si existe $t \in I$ tal que
$$\inf_{x \in I} f(x) = f(t)$$
decimos que $f(t)$ es un *mínimo absoluto* de $f$ en $I$.

TEOREMA 4.8 **[Teorema Criterio para Máximos y Mínimos Absolutos]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua; entonces $\exists s, t \in [a, b]$ tales que

$$f(s) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad \wedge \quad f(t) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

# Parte III

# La Derivada y sus aplicaciones

Capítulo 5

# La Derivada

## 5.1. Definición de la derivada de una función

DEFINICIÓN 5.1 Sea $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_0 \in ]a, b[$. Entonces si:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

diremos que $f$ es *derivable* en $x_0$ y anotamos:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

entendiendo que $f'(x_0)$ es la "derivada de $f$ en $x_0$".

EJEMPLOS 5.1

i) Sea $f(x) = c$, entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

ii) Sea $f(x) = x$, entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1.$$

iii) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2ax + ah + b)}{h} \\ &= 2ax + b \end{aligned}$$

EJERCICIOS 5.1

1. Encuentre la derivada de cada una las siguientes funciones, en su correspondiente dominio, usando la definición:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a) f(x) = x^n$ | $b) f(x) = \sqrt[n]{x}$ | $c) f(x) = \text{sen}\, x$ | $d) f(x) = \cos x$ |
| $e) f(x) = \tan x$ | $f) f(x) = \sec x$ | $g) f(x) = \csc x$ | $h) f(x) = \cot x$ |
| $i) f(x) = \log_a x$ | $j) f(x) = a^x$ | $k) f(x) = \ln x$ | $l) f(x) = e^x$ |

2. Utilizando la definición de derivada, hallar $f'(x_0)$ en el valor dado $x_0$.

$a)\ f(x) = (x^2 + x) \quad , x_0 = 2$ $\qquad b)\ f(x) = -2x^3 \quad , x_0 = 0$

$c)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} \quad , x_0 = -8$ $\qquad d)\ f(x) = \sqrt{5x-6} \quad , x_0 = 2$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \quad , x_0 = 1$$

$$f)\ f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 2 \\ x + 3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \quad , \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_0 = 2 \end{matrix}$$

3. Utilizando la definición de derivada determina, si existe, la función derivada $f'(x)$ e indica su dominio.

$a)\ f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{x-2}$

$c)\ f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $\qquad d)\ f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 9 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \qquad f)\ f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 3 & \text{si} \quad > 3 \end{cases}$$

4. Determina condiciones para $a, b, c,$ de modo que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq c \\ ax + b & \text{si} \quad x > c \end{cases} \quad , a, b, c \ \text{constantes}$$

sea derivable en $x = c$.

5. Indica si existe $f'(x_0)$.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 6x - 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \quad , \ x_0 = 1$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 25x - 1 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \quad , \ x_0 = 3$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad , \ x_0 = 0$$

$$d)\ f(x) = \ |x - 2| \quad , \quad x_0 = 2$$

6. Sea la función $f : ]-\infty, 2[ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \text{sen}(\pi x) + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

**i**) Determina si $f$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 1$.

**ii**) Define $f'(x)$ donde exista.

7. Encuentra $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f$ sea derivable en $]0, +\infty[$ y calcula $f'(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3x} & , \text{si} \quad 0 < x \leq 9 \\ ax^2 + bx & , \text{si} \quad x > 9 \end{cases}$$

## 5.2. Interpretación geométrica de la derivada

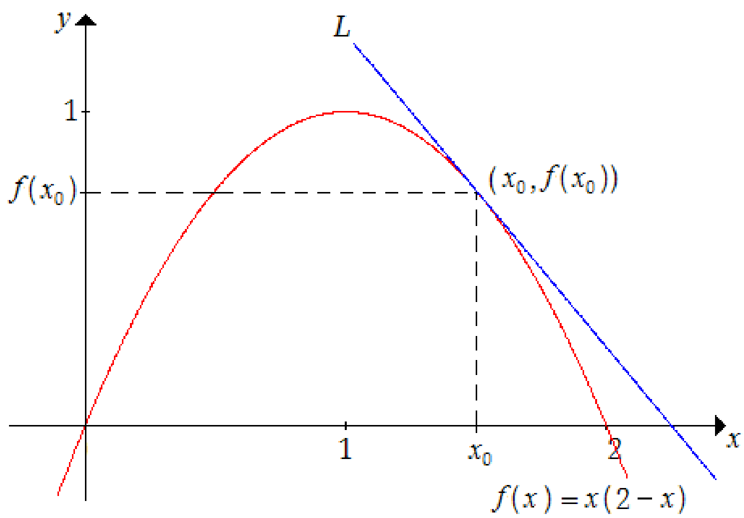
Sabemos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, a saber $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$, está dada por:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \tag{5.2.1}$$

donde el valor $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ es conocido como la pendiente de la recta. Por otra parte, si se conoce un punto $(x_0, y_0)$ por donde pasa la recta y su pendiente $m$, entonces también podemos determinar la ecuación de la recta reemplazando el valor de $m$ en la ecuación (5.2.1), la cual se reduce a

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Consideremos una curva cualquiera en el plano $\mathbb{R}^2$ y un punto cualquiera de ella por donde pase una recta tangente, por ejemplo, consideremos la curva $f(x) = x(2-x)$ y la recta $L$ que es tangente a ella en el punto $(x_0, f(x_0))$:




Notemos que la ecuación de la recta $L$ está dada por

$$\begin{aligned}
y - y_0 = m(x - x_0) &\Leftrightarrow y - f(x_0) = m(x - x_0)\\
&\Rightarrow \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = m \quad \text{con } y_0 = f(x_0)\\
&\Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \approx m \quad \forall h \text{ pequeño}\\
&\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m\\
&\Rightarrow f'(x_0) = m.
\end{aligned}$$

Luego, podemos interpretar la derivada de una función $f$ en un punto $x_0$ como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

DEFINICIÓN 5.2 Sea $f$ una función real definida en $]a, b[$ y derivable en $x_0 \in ]a, b[$. Llamamos

1. *recta tangente* a la curva representada por la gráfica de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ a la recta de ecuación
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. *recta normal* a la curva representada por la gráfica de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ a la recta de ecuación
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

EJEMPLOS 5.2

1. La pendiente de una función lineal es constante en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$f(x) \text{ es lineal } \Leftrightarrow f(x) = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

y

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = a$$

Entonces, para cualquier $x$ tenemos $m = a$, donde $m$ es la pendiente de gráfica de $f$ (que es una recta) en el punto $(x, f(x)) \forall x \in \Re$.

2. La pendiente de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, es igual a $2ax + b$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b = m$$

EJERCICIOS 5.2

1. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de la función dada en el punto $P$ dado:

   $a)$ $y = x^3$ , $P(1,1)$ $\qquad$ $b)$ $y = x^2 + 1$ , $P(0,1)$

   $c)$ $y = x - x^3$ , $P(1,0)$ $\qquad$ $d)$ $y = \sqrt{1 - x^2}$ , $P(0,1)$

   $e)$ $y = \frac{x}{x^2+1}$ , $P(0,0)$ $\qquad$ $f)$ $y = -x^4 + 2x^2 + x$ , $P(1,2)$

   $g)$ $y = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ , $P(2a, a)$

2. Encuentra el punto en que la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 + 4$ en $(1,5)$ se intersecta con ella nuevamente.

3. Dada la función $f(x) = (x+2)^2 - 4$, determina:
   $a)$ La ecuación de la recta normal $N$ al gráfico de $f$ en el origen.
   $b)$ La ecuación de la recta tangente $T$ al gráfico de $f$ en el origen.

4. Determina el valor de $a, b$ para que la recta $y = 5x - 3$ sea tangente al gráfico de $f(x) = x^3 + ax + b$ en el punto $(1,2)$.

5. Demuestra que la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 7$ en el punto $(2,1)$ es una de las rectas normales al gráfico de $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

6. ¿Para qué valores de $a, b, c$ los gráficos de $g\,(x) = x^3 + cx$ y $f\,(x) = x^2 + ax + b$ tienen una recta común en el punto $(2, 2)$?

7. ¿En qué punto la tangente del gráfico de $f\,(x) = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

8. Muestre que existe un punto en $\mathbb{R}^2$ tal que la recta $4y = x + 4$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

## 5.3. Dos Teoremas Importantes

TEOREMA 5.1 **[Teorema Forma Alternativa de la Derivada]**
Sea $f$ una función real definida en un intervalo abierto $]a, b[$ y sea $x_0 \in ]a, b[$ tal que existe $f'(x_0)$. Entonces:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}.$$

TEOREMA 5.2 **[Teorema Derivabilidad Implica Continuidad]**
Sea $f$ una función real definida en un intervalo abierto $]a, b[$ y sea $x_0 \in ]a, b[$ tal que existe $f'(x_0)$. Entonces $f$ es continua en $x_0$.

OBSERVACIÓN 5.1 El contrarecíproco del teorema siempre es cierto: Si $f$ es una función discontinua en $x_0 \in ]a, b[$, con $]a, b[ \subset \mathrm{Dom}(f)$, entonces $f$ no es derivable en $x_0$.

OBSERVACIÓN 5.2 El recíproco del teorema no siempre es cierto.

EJEMPLOS 5.3

1. Sabemos que $f(x) = x^2$ tiene derivada $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, $f(x) = x^2$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

2. Sabemos que la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$. Sin embargo:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

En otras palabras,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

y por lo tanto, no existe $f'(0)$.

EJERCICIOS 5.3 Sea la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-1}{x-1} & \text{, si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{, si} \quad x = 1 \end{cases}$$

**i**) ¿Es $g$ continua en todo su dominio?
**ii**) ¿Es $g$ derivable en $x = 1$?

## 5.4. La función derivada

DEFINICIÓN 5.3 Sea $I$ un intervalo real, y sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función bien definida. Llamamos *función derivada de* $f$ (o *primera derivada de* $f$) a la función $f'$ definida por:

$$\begin{array}{rcl} f' : \; A \subset I & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{array}$$

donde $A$ es el conjunto de los puntos en $I$ para los cuales existe el límite en la definición de $f'$.

NOTACIÓN 5.1 $f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$. Esta notación hace referencia a la variable respecto a la cual estamos derivando.

A continuación entregaremos una lista de derivadas de funciones elementales.

### 5.4.1. Derivadas de funciones algebraicas

1. **La derivada de una constante**

   Sea $k$ una constante, entonces
   $$\frac{d}{dx}[k] = 0$$

2. **La derivada de una potencia**

   Sea $r$ un número racional, entonces

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

   En particular

$$\frac{d}{dx}[x] = 1$$

### 5.4.2. Derivadas de funciones trigonométricas

1. **La derivada de seno**

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

2. **La derivada de coseno**

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

3. **La derivada de tangente**

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

4. **La derivada de cosecante**

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$$

5. **La derivada de secante**

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$$

6. **La derivada de cotangente**

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

### 5.4.3. Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

1. **La derivada de una función exponencial de base $a$**

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x$$

   En particular si $a = e$,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

2. **La derivada de una función logaritmo en base $a$.**

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

En particular, si $a = e$ tenemos $\log_e = \ln$ y

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

## 5.5. Álgebra de derivadas

TEOREMA 5.3 **[Teorema Álgebra de Derivadas]**
Sean $f, g$ dos funciones derivables con respecto a la variable $x$; entonces se obtienen los siguientes resultados:

1. **Derivada del Producto por Escalar**

$$[kf(x)]' = \frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x);\ \text{con } k = \text{constante}$$

2. **Derivada de la Suma**

$$[f(x) + g(x)]' = \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

3. **Derivada del Producto**

$$[f(x)g(x)]' = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Si Además, $g(x) \neq 0$, entonces se tiene:

4. **Derivada de un Cuociente**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

EJERCICIOS 5.4

1. Derive las siguientes funciones indicando qué regla está usando:

$a)\, f(x) = 7x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3$ $\qquad$ $b)\, f(x) = (3x + 5)(4x^3 - 2x - 1)$

$c)\, f(x) = \dfrac{3x^5 - 4x^2 + 2}{x^3 - x}$ $\qquad$ $d)\, f(x) = \left(\dfrac{x^3 - 2x}{x^4 + 4}\right)\left(\dfrac{x - 1}{x}\right)$

$e)\, f(x) = \text{sen}x\cos x + \tan x$ $\qquad$ $f)\, f(x) = \text{sen}x \cdot e^x \cdot \ln x + x \cdot \ln x$

2. Utilizando los teoremas sobre derivación, encuentra las derivadas de las siguientes expresiones

| | |
|---|---|
| $a)\ f(x) = \sec x$ | $b)\ f(x) = \csc x$ |
| $c)\ f(x) = \cot x$ | $d)\ f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2}$ |
| $e)\ f(x) = \frac{1}{1+2\cos x}$ | $f)\ f(x) = \frac{2-\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$ |

## 5.6. Regla de la cadena

TEOREMA 5.4 **[Derivada de una Función Compuesta, Regla de la Cadena]**
Sean $f, g$ dos funciones reales tales que $g$ es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $g(x)$, entonces se tiene que

$$\frac{d}{dx}\big[(f \circ g)(x)\big] = \big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Equivalentemente, si ponemos $y = f(z)$ y $z = g(x)$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

COROLARIO 5.1 **[Corolario Regla de la Cadena para Potencias]**
Sea $g$ una función derivable en $x$ y sea $r \in \mathbb{Q}$. Entonces si $\big(g(x)\big)^r$ está bién definida, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\big(g(x)\big)^r\Big] = r\big(g(x)\big)^{r-1} \cdot g'(x),$$

siempre que la expresión del lado derecho esté bien definida.

EJEMPLO 5.1

1. Sea $f(x) = x^3$ y sea $g(x) = x^2 + 1$. Entonces $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = 2x$, de donde se sigue que

$$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3\big(g(x)\big)^2 \cdot 2x = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x.$$

2. Sea $y = (x^3 + 2x + 1)^4$, entonces podemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$ procediendo como sigue. Buscamos una composición entre funciones de las cuales conocemos sus derivadas y de forma tal que la composición resulte ser exactamente igual a $y$. Por ejemplo, escogiendo $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^3 + 2x + 1$, obtenemos $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) =$

$\big(g(x)\big)^4 = (x^3 + 2x + 1)^4 = y$, entonces, como $f'(x) = 4x^3$ y $g'(x) = 3x^2 + 2$, tenemos que

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 4\big(g(x)\big)^3 \cdot g'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)^3 \cdot (3x^2 + 2).$$

OBSERVACIÓN 5.3 La regla de la cadena consiste en derivar la función que está más afuera, evaluada en la función que queda al interior, y multiplicar este resultado por la derivada de la función que quedó al interior. Si es necesario, se debe volver a aplicar la regla de la cadena para la derivada de la función al interior.

EJEMPLO 5.2

1. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\tan x)$. Encontrar $f'(x)$.

   **Solución:** Ponemos $F(x) = \operatorname{sen} x$ y $G(x) = \tan x$. Entonces:

   $$F\big(G(x)\big) = \operatorname{sen}\big(G(x)\big) = \operatorname{sen}(\tan x) = f(x).$$

   Luego, como $F'(x) = \cos x$ y por otra parte

   $$\begin{aligned} G'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \end{aligned}$$

   tenemos que

   $$f'(x) = F'\big(G(x)\big) \cdot G'(x) = \cos\big(G(x)\big) \cdot G'(x) = \cos(\tan x) \cdot \sec^2 x.$$

2. Sea $f(x) = \sqrt[3]{1 + \tan(\ln x)}$. Hallar $f'(x)$.

   **Solución:** Ponemos $F(x) = \sqrt[3]{x}$ y $G(x) = 1 + \tan(\ln x)$. Entonces $f(x) = F\big(G(x)\big)$. Sabemos que $F'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ y notemos que para encontrar $G'(x)$ debemos volver a aplicar la regla de la cadena, para obtener

   $$G'(x) = S'\big(T(x)\big) \cdot T'(x) = \sec^2(\ln x) \cdot \frac{1}{x},$$

   donde $S(x) = \tan x$ (así que $S'(x) = \sec^2 x$), y $T(x) = \ln x$ (así que $T'(x) = \frac{1}{x}$). Luego,

   $$f'(x) = F'\big(G(x)\big) \cdot G'(x) = \frac{1}{3}\big(G(x)\big)^{-\frac{2}{3}} \cdot G'(x) = \frac{1}{3}\big(1 + \tan(\ln x)\big)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sec^2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

EJERCICIOS 5.5

1. Usando regla de la cadena, encuentre una expresión para $f'(x)$, cuando:

   $a) f(x) = \operatorname{sen}\big(\cos(5x)\big)$ $\qquad$ $b) f(x) = \sqrt{e^{\tan[(x+5)^3]}}$

   $c) f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \cdot \cot\left(x^3 \cdot e^{2x}\right)$ $\qquad$ $d) f(x) = \sqrt[4]{x \ln x - x \operatorname{sen} e^{x^3}}$

2. Utilizando los teoremas sobre derivación, encuentra las derivadas de las siguientes funciones

   *a*) $f(x) = \cos(\text{sen} x) - \text{sen}(\cos x)$ *b*) $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   *c*) $f(x) = \text{sen}(\cos^2 x) - \tan(\text{sen} x)$ *d*) $f(x) = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$

   *e*) $f(x) = (2 - x^2)\cos x^2 + 2x\text{sen} x^3$ *f*) $f(x) = (x\text{sen} x)^{\frac{-2}{3}}$

   *g*) $f(x) = \tan^6(x^2 - 2x(\text{sen} x) + 1)$ *h*) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \cot\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

   *i*) $f(x) = \sqrt{\text{sen}(\tan 4x - \cos^2(3x^6))}$

3. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ si

   **i**) $y = \frac{\cot^2(3x)}{1+x^2}$ **ii**) $y = \text{sen}^3\left(5x - \sqrt{2x^2+1}\right)$

   **iii**) $y = 3x^2 - 2xy - y^2$ **iv**) $y = x\cos\left(\sqrt{\tan\left((x^2+1)^2\right)}\right)$

4. Calcular $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ si $f(x) = \left(\frac{\text{sen}\, x + \cos x}{\text{sen}\, x - \cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

5. Sea $g(x) = \begin{cases} f(x) \cdot \text{sen}\frac{1}{x} & ,\text{ si } \quad x \neq 0 \\ 0 & ,\text{ si } \quad x = 0 \end{cases}$, encuentra $g'(0)$ si $f'(0) = f(0) = 0$.

## 5.7. Derivadas de orden superior

Sabemos que la derivada de una función $f$ define una nueva función que hemos llamado *función derivada de* $f$ o *primera derivada de* $f$, la cual hemos denotado por $f'$. Recordemos que $Dom(f') \subset Dom(f)$. Ahora, derivando $f'$ obtenemos la función derivada de $f'$, que con respecto a $f$ viene a ser la *segunda derivada de* $f$, y la denotamos naturalmente $f''$. Notar que $Dom(f'') \subset Dom(f') \subset Dom(f)$. Ahora podemos derivar $f''$ y obtener la *tercera derivada de* $f$, la que denotamos por $f'''(x)$. Notar que $Dom(f''') \subset Dom(f'')$. Podemos continuar derivando $f$ cuantas veces queramos, hasta que la $n$-ésima derivada no esté definida para ningún valor $x \in Dom(f^{(n-1)})$.

NOTACIÓN 5.2 Sea $f$ una función $n$ veces derivable en $x$, entonces:
$f^{(1)}(x) = f'(x)$ denota la *primera derivada de* $f$ en $x$ (derivada de orden 1).

$f^{(2)}(x) = f''(x)$ denota la *segunda derivada de* $f$ en $x$ (derivada de orden 2).
$f^{(3)}(x) = f'''(x)$ denota la *tercera derivada de* $f$ en $x$ (derivada de orden 3).
$f^{(4)}(x)$ denota la *cuarta derivada de* $f$ en $x$ (derivada de orden 4).
......
$f^{(n)}(x)$ denota la *n-ésima derivada de* $f$ en $x$ (derivada de orden $n$).

EJERCICIOS 5.6

1. Sea $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(4x)$. Determine el valor de $b$ para el cual se cumple la igualdad:
$$f'''\Big(\frac{\pi}{4}\Big) - 7f'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = b\Big[144f\Big(\frac{\pi}{8}\Big) + 12\sqrt{2}f'\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big].$$
2. Encontre una fórmula general para $f^{(n)}(x)$ cuando:
$$a) f(x) = \text{sen} x \qquad b) f(x) = e^x \qquad c) f(x) = \ln x$$

OBSERVACIÓN 5.4 Sea $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$. Entonces decimos que $f$ es de clase $C^k$ en $]a, b[$ $\big(f \in C^k(]a, b[)\big)$ si las derivadas de orden superior $f'$, $f''$,... ,$f^k$ son todas funciones continuas en $]a, b[$. Si $f^{(k)}$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces decimos $f$ es de clase $C^\infty$ $\big(f \in C^\infty(]a, b[)\big)$. Por ejemplo, las funciones del Ejercicio 2 previo son de clase $C^\infty$ en $\mathbb{R}$, mientras que la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ni siquiera es de clase $C^1$ en $\mathbb{R}$, pues $f'(0)$ no está definida.

EJERCICIO 5.1 Determine de qué clase es en $\mathbb{R}$ la función $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$.

## 5.8. Derivada de una función inversa

TEOREMA 5.5 **[Teorema Derivada de una Función Inversa]**
Sea $f$ una función continua e invertible en $]a, b[$ y sea $c \in ]a, b[$. Supongamos que $\exists f'(c)$, $f'(c) \neq 0$ y $f(c) = k$. Entonces
$$\exists (f^{-1})'(k) \quad \wedge \quad (f^{-1})'(k) = \frac{1}{f'(c)}.$$

TEOREMA 5.6 **[Teorema Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas]**
Tenemos en sus correspondientes dominios
$$(\text{arc sen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{arc cos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\text{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad (\text{arccsc} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

EJERCICIOS 5.7

1. Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

   $a)$ $f(x) = \cos\sqrt{\ln x + \text{arcsen}(2x)} - e^{5x}$ $\quad$ $b)$ $f(x) = \ln\left(2x + \arctan(x-1)^2\right) + (x-1)^2$

2. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones. En cada caso, la función $f$ se supone definida para los valores reales que permiten que la expresión $f(x)$ tiene sentido.

   $a)$ $f(x) = \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$ $\quad$ $b)$ $f(x) = \arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \text{arcsen}\,\frac{1+x}{\sqrt{2}}$

   $c)$ $f(x) = \text{arcsen}\,(\text{sen}\, x - \cos x)$ $\quad$ $d)$ $f(x) = \arctan\left(\text{sen}^2 x - \tan^2 x\right)$

   $e)$ $f(x) = \text{arccot}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad$ $f)$ $f(x) = \left(\arctan x^2\right)^3 - \text{arcsen}\, x^2$

   $g)$ $f(x) = \text{arcsen}\,(1+x)$ $\quad$ $h)$ $f(x) = \text{arcsec}\sqrt{1+x}$

   $i)$ $f(x) = \frac{1}{1+\arctan x}$ $\quad$ $j)$ $f(x) = \text{arcsen}\left(\cos^2(1+x^2)\right)$

3. Demuestra que

$$\left(\text{arccot}\, x - \arctan\frac{1}{x}\right)' = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R};\ x \neq 0$$

4. Encuentra la derivada de la función

$$f(x) = x\left(\text{arcsen}\, x\right)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\, x$$

   y exprésala en su forma más simple.

## 5.9. Derivación implícita

Sea $f$ una función real. La expresión $y = f(x)$, con $x \in \text{Dom}\, f$, corresponde a una ecuación en dos variables donde la variable $y$ está definida explícitamente en función de la variable $x$. En este caso decimos que $y$ está definida *explícitamente* por la función $f(x)$.

EJEMPLO 5.3 Las siguientes funciones están definidas explícitamente,

$$a)\ y = x^3 - 4x + 2 \qquad b)\ y = \frac{x+2}{x-2},\quad x \neq 2 \qquad c)\ y = e^x + \tan x.$$

Sin embargo, no todas las funciones están definidas explícitamente. Una expresión del tipo $F(x,y) = 0$, donde $F$ representa una función en $x$ e $y$, corresponde a una ecuación en dos variables donde la variable $y$ está ligada mediante $F$ a la variable $x$. En este caso decimos que $y$ está definida *implícitamente* por una o más funciones que dependen de $x$.

EJEMPLOS 5.4

1. La ecuación $xy = 1$ determina una función implícita que depende de $x$, la cual puede escribirse explícitamente como:
$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$
2. La ecuación $x^2 + 3y^2 = 5$ determina dos funciones implícitas que dependen de $x$, las cuales pueden escribirse explícitamente como:
$$y = \sqrt{\frac{5 - x^2}{3}} \qquad y = -\sqrt{\frac{5 - x^2}{3}}.$$
3. La ecuación $x^5 + 3x - 1 = 2y^3 - 5y^2$ no podemos resolverla explícitamente para $y$ en función de la variable $x$, pero es posible que existan una o más funciones $f$ tales que si ponemos $y = f(x)$, la ecuación
$$x^5 + 3x - 1 = 2[f(x)]^3 - 5[f(x)]^2$$
se satisface para valores de $x \in \operatorname{Dom} f$. En este caso la variable $y$ (equivalentemente la función $f$), está definida implícitamente por la ecuación dada.

Puesto que ya sabemos derivar funciones definidas explícitamente, ahora estamos interesados en derivar funciones definidas implícitamente. Para ello es conveniente usar los teoremas "álgebra de derivadas" y "regla de la cadena", interpretando la variable $y$ como $y = f(x)$, y derivar directamente sobre la ecuación.

NOTACIÓN 5.3 Si $y = f(x)$ entonces
$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$$
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3}(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

EJERCICIOS 5.8

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si:

   *a*) $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ *b*) $xy^2 - yx^2 = 3$ *c*) $\operatorname{sen}(xy) = e^{y^2} + 2$.

2. Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (La gráfica es una elipse de lado mayor $2$ y lado menor $1$, este último sobre el eje $y$).

3. Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto $(3, 1)$.

4. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ a partir de $x^2 + y^2 = 25$. Encontrar la ecuación de la recta normal a esta curva en el punto $(4, 3)$.

5. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal al gráfico de:

   *a*) la curva $x^2 + 2x = y$ en el punto $(1, 3)$.

   *b*) la curva $y^2 = x$ en el punto $(1, -1)$.

TEOREMA 5.7 **[Teorema Una Aplicación de la Derivación Implícita]**
Sean $f$ y $g$ dos funciones reales con $D = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \neq$. Si $f$ y $g$ son derivables en $c \in D$ y supongamos que $f(c) > 0$, entonces la función real $H$ definida por $H(x) = [f(x)]^{g(x)}$ es derivable en $c$ y

$$H'(c) = H(c) \cdot \left\{ g'(c) \cdot \ln f(c) + g(c) \cdot \frac{f(c)}{f'(c)} \right\}.$$

**Demostración:** $H(c)$ es un valor estrictamente positivo, entonces:

$$\begin{aligned} H(c) = [f(c)]^{g(c)} &\Longrightarrow \ln H(c) = g(c) \cdot \ln f(c) \\ &\Longrightarrow \frac{H'(c)}{H(c)} = g'(c) \cdot \ln f(c) + g(c) \cdot \frac{f'(c)}{f(c)} \\ &\Longrightarrow H'(c) = H(c) \cdot \left\{ g'(c) \cdot \ln f(c) + g(c) \cdot \frac{f(c)}{f'(c)} \right\}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS 5.9 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

*a*) $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *b*) $f(x) = \cos(x^{\operatorname{sen} x}), \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

## 5.10. Ecuaciones paramétricas

Supongamos que queremos representar el movimiento de una partícula en el plano $\mathbb{R}^2$. Es claro que este movimiento corresponde al gráfico de una curva $\mathcal{C}$. Entonces las coordenadas $(x, y)$ de la posición de la partícula en cualquier instante $t$ están dadas por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t).$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la curva $\mathcal{C}$. Notar que la ecuación cartesiana de una curva $\mathcal{C}$ determinada por los puntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = f(t) \wedge y = g(t)\}$$

puede obtenerse considerando $y = F(x)$ siempre que $x = f(t)$ y $y = g(t) = F\big(f(t)\big)$.

EJEMPLOS 5.5

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva determinada por las ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$ y $y = a\,\text{sen}\,t$, $t \in [0, 2\pi[$. Determine la ecuación cartesiana para la curva $\mathcal{C}$ y trace su gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$.

   **Solución:** Notemos que

   $$\begin{aligned} x = a\cos t \quad \wedge \quad y = a\,\text{sen}\,t &\Longrightarrow x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2 t \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 = a^2. \end{aligned}$$

   Luego, la ecuación cartesiana de la curva $\mathcal{C}$ está dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a la ecuación de la circunferencia unitaria (de radio 1) centrada en el origen (vea **figura 1**).

2. Sea $\mathcal{C}$ la curva determinada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^3$, $t \geq 0$. Determine la ecuación cartesiana para la curva $\mathcal{C}$ y trace su gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$.

   **Solución:** Notemos que

   $$\begin{aligned} x = t^2 \quad \wedge \quad y = t^3 &\Longrightarrow x^{\frac{1}{2}} = t \quad \wedge \quad y^{\frac{1}{3}} = t \\ &\Longrightarrow y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \\ &\Longrightarrow y = x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

   Luego, la ecuación cartesiana de la curva $\mathcal{C}$ está dada por la ecuación $y = x^{\frac{3}{2}}$, con $x \geq 0$ (vea **figura 2**).

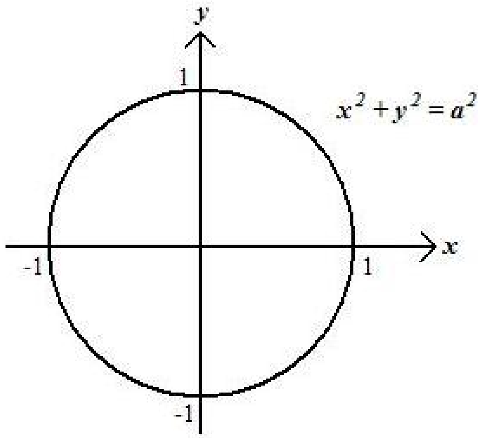



figura 1

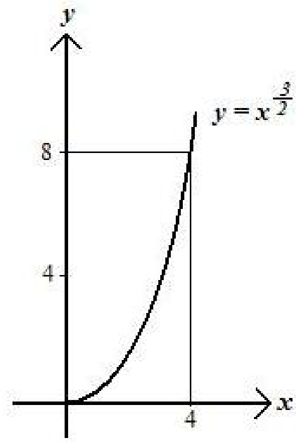



figura 2

Debemos advertir que no siempre será fácil determinar la ecuación cartesiana de una ecuación definida paramétricamente, así como tampoco será fácil determinar su gráfica. Sin embargo, como veremos más adelante, es posible obtener información acerca de su gráfica, conociendo algunas derivadas de la variable $y$ considerada como una función que depende de $x$. Nos interesa, por lo tanto, derivar ecuaciones que estén definidas paramétricamente, usando el teorema "regla de la cadena" y la derivación implícita. En efecto, recordemos que la ecuación cartesiana de una curva $\mathcal{C}$ definida paramétricamente por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = f(t) \wedge y = g(t)\}$ puede obtenerse considerando $y = F(x)$ siempre que $x = f(t)$ y $y = g(t) = F\big(f(t)\big)$.En este caso, podemos obtener $y' = \dfrac{dy}{dx}$ como sigue:

$$\underbrace{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}_{\text{Regla de la Cadena}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},}_{\text{Despejando } \frac{dy}{dx}} \qquad \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

De igual forma podemos encontrar

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{\frac{d(y'')}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

y así sucesivamente.

EJERCICIOS 5.10 Encontrar $y'$, $y''$ y $y'''$ a partir de las ecuaciones paramétricas:

$$a)\; x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3 \qquad\qquad b)\; x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\, t.$$

## 5.11. Variaciones relacionadas

Hemos visto como usar la regla de la cadena para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ implícitamente. Ahora consideraremos funciones definidas por un parámetro común $t$, acerca de las cuales conocemos la ecuación cartesiana que las relaciona, y derivaremos implícitamente esta ecuación con respecto al parámetro $t$, para obtener una ecuación en *variaciones relacionadas*, en la cual se expresa la *razón de cambio* de cada función definida paramétricamente con respecto al parámetro común $t$. Por ejemplo, el agua que sale desde un depósito cónico, el volumen, el radio y la altura del nivel del agua son funciones que dependen del tiempo $t \geq 0$ sabiendo que ellas se relacionan por la ecuación

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h,$$

entonces derivamos implícitamente con respecto al tiempo $t$, para obtener la ecuación en variaciones relacionadas

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right] = \frac{\pi}{3}\left[2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right].$$

Aquí vemos que la *razón de cambio* del volumen $V$ está ligado a la razón de cambio de $h$ y $r$, con respecto al tiempo $t$, mediante la ecuación anterior (vea la **figura 3**).

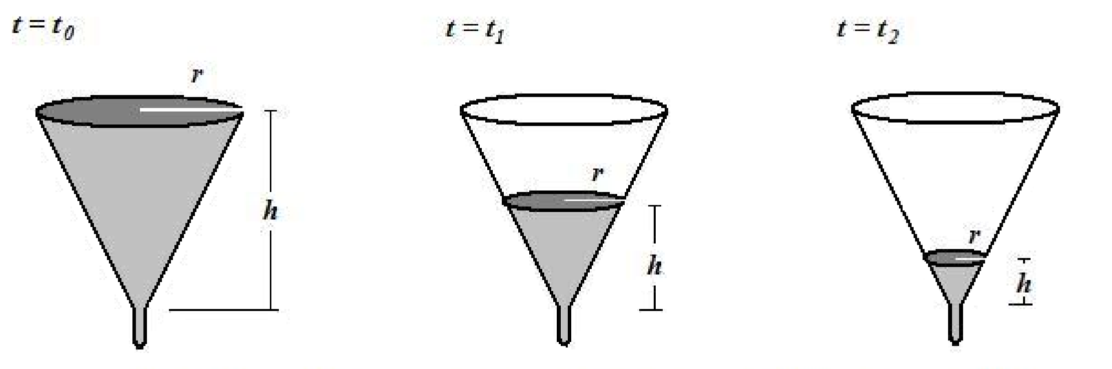



**figura 3** : A medida que el tiempo avanza el volumen $V$ de agua en el tanque cónico, el radio $r$ y la altura $h$ disminuyen. La razón de cambio del volumen indica la velocidad a la que se está vaciando el tanque.

EJEMPLOS 5.6

1. Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ dos funciones derivables para $t > 0$, que están relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$. Calcular $\frac{dy}{dt}$ para $x = 1$, dado que $\frac{dx}{dt} = 2$ si $x = 1$.

2. Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas concéntricas. El radio $r$ de la onda exterior crece a ritmo constante $30cm/seg$. Cuando su radio es $120cm$, ¿a qué ritmo está creciendo el área total $A$ de la zona perturbada?

3. Se bombea aire en un globo esférico a razón de $4,5cm^3/min$ (volumen de aire que se tranpasa al globo en un minuto). Hallar la razón de cambio del radio cuando éste es $2cm$.

4. Un avión vuela a $6$ millas de altitud en línea recta hacia la posición de un radar. Sea $s$ la distancia (en millas) entre el avión y el radar. Si $s$ está creciendo a razón de $400$ millas por hora. Cuando $s$ es $10$ millas, ¿Cuál es la velocidad del avión?

EJERCICIOS 5.11

1. Un automóvil viaja a una velocidad de 18,288$\frac{m}{seg}$ se aproxima a un cruce y cuando está a 365,76$m$ de este, un segundo automóvil se desplaza a 12,192$\frac{m}{seg}$ en dirección al cruce de tal forma que sus trayectorias forman un ángulo recto. ¿Con qué velocidad se separan los automóviles $10seg$ después que el segundo pasa por el cruce?

2. Un estanque cónico tiene una profundidad de 3,658$m$ y un radio de 1,829$m$ en su parte superior. Si se vierte agua en el estanque a razón de 0,1133$\frac{m^3}{min}$. ¿Con qué rapidez está cambiando el radio de la superficie del agua en el estanque cuando la profundidad es de 1,829$m$?

3. Una escalera de 4,57$m$ está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo superior de la escalera se desliza hacia abajo con una velocidad de 0,61$\frac{m}{seg}$, determine la velocidad con que se desplaza el extremo inferior en el instante en que dicho extremo está a 3,66$m$ de la pared.

4. Un hombre de 1,52$m$ de estatura se aleja de una luz, que está 4,57$m$ sobre el suelo, a una velocidad de 1,22$\frac{m}{seg}$. Determine la velocidad con que se está desplazando la sombra proyectada por el hombre sobre el suelo cuando él está a 9,14$m$ de la base de la luz.

5. Una partícula se mueve en la órbita circular $x^2 + y^2 = 1$. Cuando pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ su ordenada decrece a razón de 3 *unidades por segundo.* ¿En qué razón está variando la abscisa en ese mismo instante?

6. Una piedra se lanza dentro de un estanque y produce ondas que se expanden a partir del punto de impacto. Cuando el radio es de 2,4334$m$ se observa que el radio está creciendo con una velocidad de 0,4572$\frac{m}{seg}$. ¿Con qué rapidez está creciendo en ese instante el área encerrada por la onda circular?

7. Un punto $P$ se mueve a lo largo de la curva $y = x^3 - 3x^2$. Cuando $P$ está en $(1, -2)$ su abscisa está creciendo a una velocidad de 3 *unidades por segundo.* Encuentre la velocidad de crecimiento de la distancia de $P$ al origen.

8. La resistencia eléctrica de cierto resistor, como función de la temperatura $T$, está dada por $R = 4,060 + 0,003T^2$, donde $R$ se mide en ohms$(\Omega)$ y $T$ en grados celcius$(°C)$. Si la temperatura está creciendo a una velocidad de 0,1$\frac{°C}{seg}$, encuentre la velocidad con la que está cambiando la resistencia cuando $T = 150°C$.

9. Un balón se infla a razón de $15\frac{m^3}{seg}$. ¿A que razón está creciendo el diámetro en el instante en que el diámetro ha alcanzado 10$m$?

10. Un bebedero tiene 4$m$ de longitud y su sección transversal es un triangulo equilátero con lados de 61$cm$ de longitud. Si se vierte agua en el bebedero a razón de 1$\frac{m^3}{min}$. ¿Con qué rapidez aumenta el nivel del agua cuando la profundidad de la misma es de 15$cm$?

11. Cuando un cohete está a 4000$m$ de altura se eleva verticalmente con una velocidad de 540$\frac{km}{h}$. Calcule con qué rapidez aumenta el ángulo de elevación del cohete, en ese instante, cuando es visto por un observador sobre la tierra a 9$km$ de la plataforma de lanzamiento.

## Capítulo 6

# Aplicaciones de la Derivada

## 6.1. Máximos y mínimos de una función

En este momento es conveniente recordar la definiciones de *máximo absoluto* y *mínimo absoluto* de una función introducidas en **3.11**. Estos conceptos tienen que ver con el valor máximo y el valor mínimo que alcanza la función en todo su dominio, esto es, desde un punto de vista global. A continuación introducimos dos definiciones que tienen que ver con el concepto de máximo y mínimo de una función en una parte de su dominio, es decir, desde un punto de vista local.

DEFINICIÓN 6.1 Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, donde $I$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

*i)* Sea $A \subset I$ un intervalo abierto. Si existe $c \in A$ tal que
$$f(x) < f(c), \quad \forall x \in A,$$
entonces decimos que $f(c)$ es un *máximo relativo* de $f$.

*ii)* Sea $A \subset I$ un intervalo abierto. Si existe $c \in A$ tal que
$$f(c) < f(x), \quad \forall x \in A,$$
entonces decimos que $f(c)$ es un *mínimo relativo* de $f$.

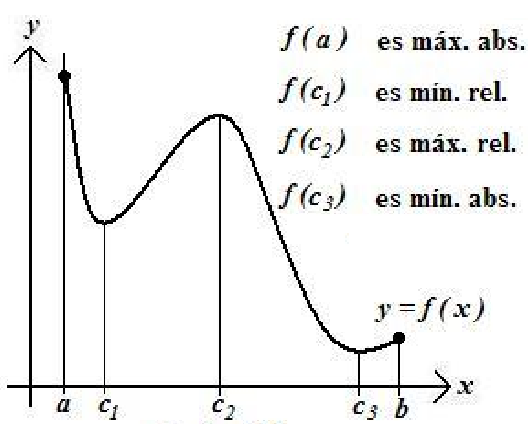



figura 4

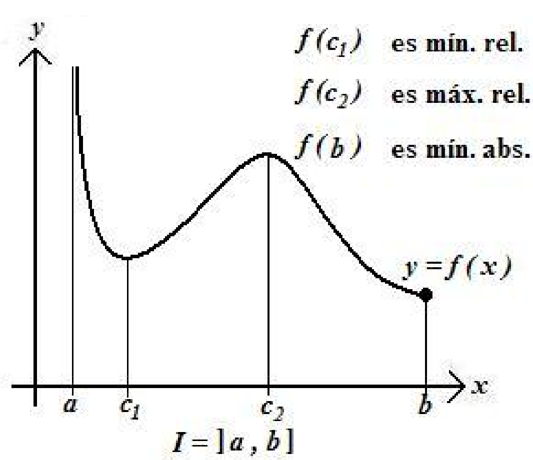



figura 5

Recordemos ahora el siguiente Teorema:

TEOREMA 6.1 **[Teorema Criterio para Máximos y Mínimos Absolutos]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua; entonces $\exists s, t \in [a, b]$ tales que

$$f(s) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad \wedge \quad f(t) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

DEFINICIÓN 6.2 Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función real, y sea $A \subset I$ un intervalo abierto. Si $p \in A$ es tal que $f'(p) = 0$ entonces decimos que $p$ es un *punto crítico* de $f$.

OBSERVACIÓN 6.1 Un punto crítico $p$ es candidato a que $f(p)$ sea máximo o mínimo relativo de $f$, pues $f'(p) = 0$ indica que la recta tangente a la gráfica de $f$ tiene pendiente cero en el punto $\big(p, f(p)\big)$.

OBSERVACIÓN 6.2 De acuerdo al teorema previo, la definición de punto crítico y la observación anterior, concluimos que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f$ alcanza sus valores extremos en $a, b$ o en los puntos críticos $p$ de $f$.

## 6.2. Aplicaciones de Máximos y mínimos en intervalos cerrados

Antes de resolver los siguientes problemas les recomiendo seguir los siguientes pasos:

$1^{\text{ro}}$) Trace un dibujo relacionado con el problema, identificando los datos y los valor incógnitos que debe encontrar. De ser necesario, debe usar sus conocimientos geométricos o relaciones conocidas para reducir todo a una única incógnita.

$2^{\text{do}}$) Determine una función en términos de su única incógnita y establezca un dominio lógico para ella.

$3^{\text{ro}}$) Encuentre los puntos críticos de la función.

$4^{\text{to}}$) Analice los valores extremos de la función, evaluándola en los puntos críticos encontrados y en los extremos del intervalo de definición (dominio de la función).

$5^{\text{to}}$) Compare los valores obtenidos para la función en los puntos evaluados y concluya.

EJEMPLOS 6.1

1. Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón cortando cuadrados en las esquinas y doblando hacia arriba. Si las dimensiones de cada trozo de cartón son de $10cm$ de ancho por $17cm$ de largo, determinar la longitud que deben tener los lados de los cuadrados a cortar para que la caja resultante tenga el mayor volumen posible.

2. Sean $A$ y $B$ dos puntos opuestos a orillas de un río recto de ancho constante igual a $3$ kilómetros. Un tercer punto $C$ está en la orilla donde está $B$, a $k$ kilómetros de $B$. Una Compañía telefónica desea tender un cable desde $A$ hasta $C$. Si el costo por kilómetro de cable tendido sobre tierra es de $\$10.000$ y el costo por kilómetro de cable tendido bajo el río (cable subterráneo) es de $\$12.500$, encuentre el costo mínimo del cableado desde $A$ hasta $C$ para $k = 2$ y para $k = 10$. En cada caso señale las condiciones bajo las cuales el costo encontrado es mínimo. (SUG: Considere un punto arbitrario $P$ entre $B$ y $C$, de modo que al cable comience desde $A$, se dirija hacia $P$ y luego hacia $C$)

3. Encontrar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en un cono circular recto cuyo radio mide $5cm$ y su altura es de $12cm$.

## 6.3. Teorema de Rolle y Teorema del valor medio

TEOREMA 6.2 **[Teorema de Rolle]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(b) = f(a)$, entonces:

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \text{tal que} \quad f'(c) = 0.$$

TEOREMA 6.3 **[Teorema del Valor Medio]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(b) = f(a)$, entonces:

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \text{tal que} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

EJERCICIOS 6.1

1. Verifique las hipótesis del Teorema de Rolle se cumplen para la función dada en el intervalo correspondiente. Luego, encuentre un valor $c$ adecuado para el cuál se

cumpla la conclusión del Teorema de Rolle.

$a)$ $f(x) = x^2 - 4x + 3; \quad [1, 3]$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2; \quad [1, 2]$

$c)$ $f(x) = \text{sen}(2x); \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2. Verifique las hipótesis del Teorema del Valor Medio se cumplen para la función dada en el intervalo correspondiente. Luego, encuentre un valor $c$ adecuado para el cuál se cumpla la conclusión del Teorema del Valor Medio.

   $a)$ $f(x) = x^2 + 2x - 1; \quad [0, 1]$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = x^3 + x^2 - x; \quad [-2, 1]$

   $c)$ $f(x) = \sqrt{1 - \text{sen}\, x}; \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Si $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, entonces $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$. Demuestre usando el Teorema de Rolle que la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz real en el intervalo $]0, 1[$.

## 6.4. Criterios de crecimiento y decrecimiento. Criterios de máximos y mínimos relativos

DEFINICIÓN 6.3 Sea $I$ un intervalo real. Llamamos *interior* de $I$ al mayor intervalo abierto (en el sentido de la inclusión) totalmente contenido en $I$. El interior de $I$ se denota por $\text{int}(I)$.

TEOREMA 6.4 **[Criterio de la 1ra derivada. Crecimiento y/o decrecimiento de una función]**
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo $I$ y derivable en $\text{int}(I)$. Entonces:

$i)$ $f'(x) > 0, \quad \forall x \in \text{int}(I) \implies f$ es creciente ($\nearrow$) sobre $\text{int}(I)$.

$ii)$ $f'(x) > 0, \quad \forall x \in \text{int}(I) \implies f$ es decreciente ($\searrow$) sobre $\text{int}(I)$.

COROLARIO 6.1 **[Criterio de la $1$ra derivada. Máximos y/o mínimos relativos de una función]**
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo $I$ y derivable en $\text{int}(I)$ salvo tal vez en $c \in \text{int}(I)$.

*i)* Si $\exists\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0, \;\; \forall x \in ]c-\delta, c[$ y $f'(x) < 0, \;\; \forall x \in ]c, c+\delta[$, entonces

$$f(c) \text{ es un máximo relativo de } f \text{ en } I.$$

*ii)* Si $\exists\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in ]c-\delta, c[$ y $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in ]c, c+\delta[$, entonces

$$f(c) \text{ es un mínimo relativo de } f \text{ en } I.$$

TEOREMA 6.5 **[Criterio de la 2^da derivada para Máximo y/o mínimo relativo de una función]**
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo $I$ y dos veces derivable en el interior de $I$. Sea $c \in \text{int}(I)$ un punto crítico de $f$. Entonces:

*i)* $f''(c) < 0 \Longrightarrow f(c)$ es un máximo relativo de $f$ en $I$.

*ii)* $f''(c) > 0 \Longrightarrow f(c)$ es un mínimo relativo de $f$ en $I$.

*iii)* $f''(c) = 0 \Longrightarrow$ no se puede concluir nada sobre $f(c)$.

EJERCICIOS 6.2

1. Usando el criterio de la 1^ra derivada, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimo relativos de las siguientes funciones:

   *a)* $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x - 3$ *b)* $f(x) = x^2e^x$ *c)* $f(x) = \dfrac{1}{x}, \;\; x \neq 0.$

2. Usando el criterio de la 2^da derivada, encuentre los extremos relativos de las siguientes funciones:

   *a)* $f(x) = x^3 - 2x - 2$ *b)* $f(x) = xe^x$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 27}{x - 6}, \;\; x \in [0, 6].$

## 6.5. Aplicaciones de máximos y mínimos en intervalos reales cualesquiera

Para resolver estos problemas, primero deben notar que los extremos del intervalo en que trabajan no son necesariamente cerrados. Sin embargo pueden seguir pasos similares a los establecidos en **5.2**, sólo cambien el paso 4^to) por:

4$^{\text{to}}$) Analice los valores extremos de la función usando el criterio de la 2$^{\text{da}}$ derivada.

EJEMPLOS 6.2

1. Hallar las dimensiones de un tambor cilíndrico con una capacidad de $2000cm^3$ que tenga la menor superficie posible.

2. Un bote salvavidas está a $20km$ al sur de un barco de carga. El salvavidas viaja a $20km/h$ y el cargero a $40km/h$ en perpendicular al poniente. Si debido a la densa niebla el radio máximo de visión es de $10km$, ¿Podrán visualizarse personas de ambos barcos?.

EJERCICIOS 6.3 Resuelva los siguientes problemas:

1. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse de ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud $13cm$, y un cateto mide $5cm.$ Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado en la hipotenusa y los vértices del lado opuesto en los catetos. ¿Cuál es el resultado si la hipotenusa es H$cm$ y la altura del triángulo es de h$cm$?

3. La suma de tres números positivos es 30. El primero, más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de manera que el producto de los tres sea el mayor posible.

4. Un fabricante produce copas de aluminio de un volumen dado $(16cm^3)$ con la forma de cilindros circulares rectos abiertos en el extremo superior. Hallar las dimensiones necesarias para que la cantidad de material empleado sea mínima. ¿Cuál es el resultado si el volumen dado es $V_0$?

5. Determinar el segmento más corto cuyos extremos están en la parte positiva de los ejes $x$ e $y$, y que pasa por el punto $(1, 8)$.

6. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor área lateral que se puede inscribir en una esfera de radio $R.$

7. Una pieza de alambre de longitud $L$ se corta en dos partes. Con una de ellas se forma un cuadrado y con la otra una circunferencia.

   $(a)$ ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?

   $(b)$ ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas sea máxima?

8. Una ventana tiene forma de un triángulo rectángulo con su parte superior en forma de triángulo equilátero. el perímetro de la ventana es $5m.$ Calcule sus dimensiones para que deje pasar el máximo de luz.

9. Los márgenes superior e inferior de una página son ambas de 1,5$cm,$ y los márgenes laterales son de $1cm$ cada uno. Si el área del material impreso por página es fijo e igual a $30cm^2,$ ¿Cuáles son las dimensiones de la página de área total mínima?

10. El interior de una caja de fondo cuadrado y sin tapa debe revestirse de plomo. Si el volumen de la caja debe ser de 32$lt$, ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de plomo sea mínima?

11. Se desea almacenar aceite en tambores cilíndricos de $375cm^3$, ¿qué dimensiones del tambor corresponden a la menor cantidad de material utilizado en su fabricación?

12. Un agricultor desea emplear cortadores de tomates para cosechar 62500 tomates. Cada cortador puede cosechar 625 tomates por hora y se pagan \$6 por hora. Además, el agricultor debe pagar un supervisor a \$10 la hora y pagar al sindicato \$10 por cada cortador empleado.

    $(a)$ ¿Cuántos cortadores debería emplear el agricultor para minimizar el costo de la cosecha de tomates?

    $(b)$ ¿Cuál es el costo mínimo para el agricultor?

## 6.6. Concavidad. Puntos de Inflexión. Trazado de curvas

DEFINICIÓN 6.4 Sea $f\ :]a,b[\rightarrow\mathbb{R}$ una función derivable en un punto $c\in]a,b[$. El gráfico de $f$ es:

$i)$ *concavo hacia arriba (o convexo)* $(\cup)$ en el punto $(c,f(c))$ si:

$\exists\delta>0$ tal que $c\in]c-\delta,c+\delta[=I_\delta\subset]a,b[\ \wedge\ \forall x\in I_\delta,\ x\neq c,\ (x,f(x))\in$ graf $f$

está sobre la recta tangente a la gráfica en el punto $(c,f(c))$.

*ii*) *cóncavo hacia abajo (o cóncavo)* $(\cap)$ en el punto $(c, f(c))$ si:

$\exists\delta > 0$ tal que $c \in ]c-\delta, c+\delta[= I_\delta \subset ]a,b[ \wedge \forall x \in I_\delta,\ x \neq c,\ (x, f(x)) \in$ graf $f$

está bajo la recta tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

TEOREMA 6.6 Sea $f$ :$]a,b[\to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $c \in ]a,b[$ y asumamos que $\exists f''(c)$; entonces:

*i*) $f''(c) > 0 \Rightarrow$ graf $f$ es cóncavo hacia arriba en $(c, f(c))$.

*ii*) $f''(c) < 0 \Rightarrow$ graf $f$ es cóncavo hacia abajo en $(c, f(c))$.

DEFINICIÓN 6.5 Sea $f$ :$]a,b[\to \mathbb{R}$ una función derivable y sea $c \in ]a,b[$. $(c, f(c))$ es un *punto de inflexión* del graf $f$ si en tal punto el graf $f$ cambia de concavidad.

DEFINICIÓN 6.6 Sea $f$ :$]a,b[\to \mathbb{R}$ una función derivable y sea $c \in ]a,b[$ tal que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión del graf $f$. entonces si $\exists f''(c)$, $f''(c) = 0$.

EJERCICIOS 6.4

1. Encontrar para cada una de las siguientes funciones los puntos de inflexión, si los hay, y los intervalos en que la función es cóncava hacia arriba y/o abajo:

   *a*) $f(x) = 2\operatorname{sen} 3x$; $x \in [-\pi, \pi]$.

   *b*) $f(x) = e^x$.

   *c*) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$.

   *d*) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

2. Realizando un análisis previo que implique el estudio de: puntos críticos, intervalos de crecimiento y/o decrecimiento, máximos y/o mínimos relativos y/o absolutos, concavidad hacia arriba y/o hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas horizontales, verticales y/u oblicuas; trace las curvas (o gráficas) de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

   *b*) $f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$.

   *c*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

## 6.7. Regla de L'Hôpital

La regla que a continuación presentamos facilita enormemente el cálculo de algunos límites. En particular, si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{0}{0}\quad\vee\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

TEOREMA 6.7 **[Teorema Regla De L'Hôpital]**

$i)$ Suponga que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

con $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

$ii)$ Suponga que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

con $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

EJEMPLOS 6.3 Hallar los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x-1}\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}\qquad d)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

Otras formas indeterminadas son las siguientes:

$$0\cdot\infty,\quad 0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0,\quad \infty-\infty$$

las cuales ilustramos con los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS 6.4 Hallar los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{x\to0}x\ln x\qquad b)\ \lim_{x\to0}x^x\qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\qquad d)\ \lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}\qquad e)\ \lim_{x\to0}(\csc x-\operatorname{cotan}x)$$