Información que obtenemos de la derivada primera de una función

Valores de la primera derivada

$f´(x) = 0$ → Puede haber máximos o mínimos locales.
$f´(x) > 0$ → Función creciente en ese intervalo.
$f´(x) < 0$ → Función decreciente en ese intervalo.

Pasos para calcular el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

Ejemplo

Dada la función $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4}$, estudia su crecimiento y decrecimiento.
¿Tiene f(x) máximos o mínimos?. Si los tiene halla sus coordenadas.

1. Derivada primera de la función

Hacemos la derivada primera de la función. La igualamos a 0 y resolvemos la ecuación.
Si la ecuación tiene solución, en esos puntos de x puede haber máximos o mínimos locales (también se llaman puntos singulares o puntos críticos).

$\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4}$

Derivada primera $\Rightarrow f´(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Igualamos la derivada primera a 0 y resolvemos la ecuación.

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

En estos puntos puede haber máximo o mínimo.

2. Crecimiento y decrecimiento.

Trazamos una recta y marcamos los valores de x que me anulan la derivada.
La recta queda dividida en intervalos. Cogemos valores de x comprendidos en cada intervalo, los sustituimos en la derivada y vemos su signo.

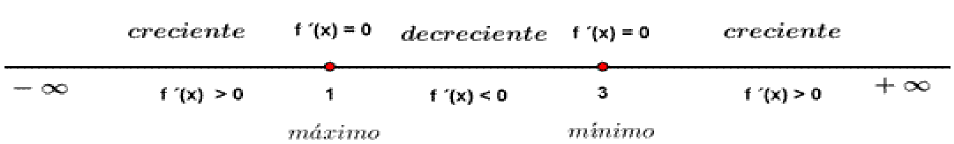
$f´(x) > 0$ → Función creciente en ese intervalo.
$f´(x) < 0$ → Función decreciente en ese intervalo.

La función es creciente en aquellos intervalos donde el signo de la función derivada es positivo. Es decreciente en el intervalo donde la función derivada es negativa.

$\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4}$

Trazamos una recta marcamos los valores 1 y 3.
La recta nos queda dividida en 3 intervalos.
Tomamos un valor de x para cada intervalo y lo sustituimos en la derivada para ver su signo.

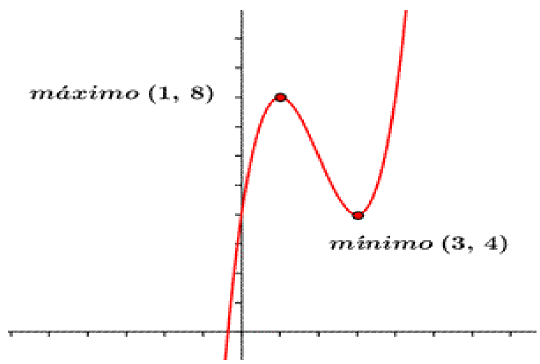
Intervalo $(-\infty, 1]$ cojo $x = 0 \Rightarrow f´(0) = 9$ positiva función es creciente.
Intervalo $[1,3]$ cojo $x = 2 \Rightarrow f´(2) = -3$ negativa función decreciente.
Intervalo $[3, +\infty)$ cojo $x = 4 \Rightarrow f´(4) = 9$ positiva función decreciente.



3. Máximos y mínimos $\Rightarrow f'(x) = 0$

Deducimos si es máximo o mínimo estudiando el crecimiento y decrecimiento.
Máximo local $\rightarrow$ creciente − decreciente. En ese valor de x donde $f'(x) = 0$ hay un máximo.
Mínimo local $\rightarrow$ decreciente − creciente. En ese valor de x donde $f'(x) = 0$ hay un mínimo.
Los máximos y mínimos son puntos necesito las dos coordenadas (x,y).
Para calcular la coordenada "y" de los máximos y mínimos sustituimos el valor de x en la función.
Si sale creciente − creciente o decreciente − decreciente no hay máximos ni mínimos.

$x = 1$ $\Rightarrow$ creciente - decreciente $\Rightarrow$ máximo local $\Rightarrow$ $f(1) = 8$ $\Rightarrow$ Coordenadas (1,8)
$x = 3$ $\Rightarrow$ decreciente - creciente $\Rightarrow$ mínimo local $\Rightarrow$ $f(3) = 4$ $\Rightarrow$ Coordenadas (3,4)



Ejemplo

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{(x+5)^2}$, halla sus puntos singulares.

- **Derivada**

$$f(x) = \frac{x}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1\cdot(x+5)^2 - x\cdot 2(x+5)}{(x+5)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x+5}{(x+5)^3} \Rightarrow \frac{-x+5}{(x+5)^3} = 0 \Rightarrow -x+5 = 0 \Rightarrow$$ **En x = 5 puede haber máximo o mínimo.**

- **Crecimiento y decrecimiento**

La recta queda dividida en dos trozos. $\Rightarrow f'(4) > 0$ creciente $\Rightarrow f'(6) < 0$ decreciente

$$-\infty \;\; \overbrace{f'(4) > 0 \text{ creciente}}^{x = 4} \;\; 5 \;\; \overbrace{f'(6) < 0 \text{ decreciente}}^{x = 6} \;\; +\infty$$

$\cap$ máximo

- **Máximo local** en $x = 5 \Rightarrow f(5) = \dfrac{1}{20} \Rightarrow$ Coordenadas del máximo $\left(5, \dfrac{1}{20}\right)$

*** Conviene hallar el dominio (al principio) para estar seguros que en los puntos donde pueda haber máximos o mínimos la función existe. Dom f = $\mathbb{R}$ -{−5}. En este caso como el máximo nos ha salido en x = 5 no tenemos problema.

Cálculo de los máximos y mínimos relativos

- $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1. **Hallamos la derivada primera y calculamos sus raíces.**

   - $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$
   - $x = -1$ $x = 1.$

2. **Realizamos la 2ª derivada, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada primera y si:**

   - **$f''(x) > 0$ Tenemos un mínimo.**
   - **$f''(x) < 0$ Tenemos un máximo.**
   - $f''(x) = 6x$
   - $f''(-1) = -6$ Máximo
   - $f''(1) = 6$ Mínimo

3. **Calculamos la imagen (en la función) de los extremos relativos.**

   - $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$
   - $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$
   - **Máximo(−1, 4)** **Mínimo(1, 0)**

Ejercicios

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

- $f'(x) = 4x^3 - 16x$ $4x^3 - 16x = 0$
- $x = -2$ $x = 0$ $x = 2$
- $f''(x) = 12x^2 - 16$
- $f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 > 0$ Mínimo $(-2, -13)$
- $f''(0) = 12(0)^2 - 16 < 0$ Máximo $(0, 3)$
- $f''(2) = 12(2)^2 - 16 > 0$ Mínimo $(2, -13)$

- $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$
    - $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}=\dfrac{x^2-x-2}{(x-3)^2}$
    - $f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-3)^2-(x^2-x-2)2(x-3)}{(x-3)^4}=\dfrac{-5x+7}{(x-3)^3}$
    - $\dfrac{-5x+7}{(x-3)^3}=0 \qquad -5x+7=0 \qquad x=\dfrac{7}{5}$
    - $f''(x)=\dfrac{10x-6}{(x-3)^4} \qquad f''\left(\dfrac{7}{5}\right)=\dfrac{10\left(\dfrac{7}{5}\right)-6}{\left(\left(\dfrac{7}{5}\right)-3\right)^4}>0$
    - $f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^2-\left(\dfrac{7}{5}\right)-2}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^2-6\left(\dfrac{7}{5}\right)+9}=-\dfrac{9}{16}$ *Mínimo* $\left(\dfrac{7}{5},-\dfrac{9}{16}\right)$

$f(x)=e^x\left(2x^2+x-8\right)$

- $f'(x)=e^x\left(2x^2+x-8\right)+e^x(4x+1)=e^x\left(2x^2+5x-7\right)$
- $e^x\left(2x^2+5x-7\right)=0 \qquad x=1 \qquad x=-\dfrac{7}{2}$
- $f''(x)=e^x\left(2x^2+9x-2\right)$
- $f''(1)=e^1\left(2\cdot 1^2+9\cdot 1-2\right)>0 \qquad f(1)=-5e$
- Mínimo $(1,-5e)$
- $f''\left(-\dfrac{7}{2}\right)=e^{-\frac{7}{2}}\left(2\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)-2\right)<0 \qquad f\left(-\dfrac{7}{2}\right)=13e^{-\frac{7}{2}}$
- Máximo $\left(-\dfrac{7}{2},13e^{-\frac{7}{2}}\right)$

$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

- $x^2 - 1 > 0$ $\quad x^2 - 1 = 0$ $\quad x = \pm 1$
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
	+	−	+
- $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$
- $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = 0$ $\quad x = -1 + \sqrt{2} \notin D$ $\quad x = -1 - \sqrt{2}$
- $f''(x) = \dfrac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$ $\quad f''(-1 - \sqrt{2}) = \dfrac{-2\left((-1 - \sqrt{2})^2 + 1\right)}{\left((-1 - \sqrt{2})^2 - 1\right)^2} < 0$
- En $x = -1 - \sqrt{2}$ hay un máximo

$f(x) = \operatorname{sen} 2x$

- $f'(x) = 2 \cos 2x$ $\quad 2 \cos 2x = 0$
- $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$
- $2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ $\quad x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi$
- $f''(x) = -4 \operatorname{sen} 2x$
- $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- Máximo $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 1\right)$
- $f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4 \operatorname{sen} 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0$ $\quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$
- Mínimo $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -1\right)$

Problemas

Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un **máximo** para $x = -4$, un **mínimo**, para $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$.

- $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
- $1 = 1 + a + b + c$ $\quad$ $a + b + c = 0$
- $0 = 48 - 8a + b$ $\quad$ $8a - b = 48$
- $0 = 0 - 0 + b$ $\quad$ $b = 0$
- **$a = 6$ $\quad$ $b = 0$ $\quad$ $c = -6$**

Determinar el valor de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un **máximo** en (0, 4) y un **mínimo** en (2, 0).

- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
- $f(0) = 4$ $\quad$ $d = 4$
- $f(2) = 0$ $\quad$ $8a + 4b + 2c = 0$
- $f'(0) = 0$ $\quad$ $c = 0$
- $f'(2) = 0$ $\quad$ $12a + 4b + c = 0$
- **$a = 1$ $\quad$ $b = -3$ $\quad$ $c = 0$ $\quad$ $d = 4$**

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + ax + c}$$

Calcula a, b y c, de modo que f(x) tenga en (2, −1) un extremo local y que la curva pase por el origen de coordenadas.

- $f'(x) = \dfrac{(2x + a)(x^2 + ax + c) - (x^2 + ax + b)(2x + a)}{(x^2 + ax + c)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{(2x + a)(b - c)}{(x^2 + ax + c)^2}$
- $f(2) = -1$ $\quad$ $\dfrac{2^2 + a \cdot 2 + b}{2^2 + a \cdot 2 + c} = -1$
- $f(0) = 0$ $\quad$ $\dfrac{b}{c} = 0$
- $f'(2) = 0$ $\quad$ $\dfrac{(2 \cdot 2 + a)(b - c)}{(2^2 + a \cdot 2 + c)^2} = 0$
- $a = -4$ $\quad$ $b = 0$ $\quad$ $c = 8$

Hallar a y b para qué la función: f(x) = a · ln x + bx ^{2} + x tenga extremos en los puntos x_1 = 1 y x_2 = 2. Para esos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tienen la función en 1 y en 2?

- $f'(x) = a\frac{1}{x} + 2bx + 1$ $\qquad f''(x) = \frac{-a}{x^2} + 2b$
- $f'(1) = 0$ $\qquad a + 2b + 1 = 0$ $\qquad a = -\frac{2}{3}$
- $f'(2) = 0$ $\qquad \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$ $\qquad b = -\frac{1}{6}$
- $f''(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}$
- $f''(1) = \frac{2}{3}\frac{1}{1^2} - \frac{2}{3} > 0$ $\qquad$ Mínimo en $x = 1$
- $f''(2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3} < 0$ $\qquad$ Máximo en $x = 2$