GUÍA DE EJERCICIOS
APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. Los costos fijos de una empresa son de $1200, los costos combinados de material y trabajo son de $2 por unidad y la ecuación de demanda es $p = \frac{100}{\sqrt{q}}$

¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio en el cual la utilidad es máxima?

2. El fabricante de un producto encuentra que para las primeras 500 unidades que produce y vende la utilidad es $ 50 por unidad. La utilidad por cada unidad producida más allá de 500 disminuye en $ 0,10 por el número de unidades adicionales producidas. ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad?

3. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $\mathbf{p = 600 - 2q}$**,** y la función de costo total es $\mathbf{c = 0.2q^2 + 28q + 200}$

Encuentre la producción y el precio que maximizarán la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno establece un impuesto de $22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serian entonces la producción y el precio que maximizarian la utilidad? ¿Cuál seria ahora la utilidad?

4. Para el producto de un monopolista, la función de costo es $\mathbf{c = 500 + 30q}$ y la función de demanda $\mathbf{p = 72 - 0.04q}$. Encuentre la producción que maximiza la utilidad. ¿Cuál es el precio y cuál es la utilidad?

Ingreso

5. Una empresa de bienes raices posee 100 departamentos tipo jardín. Cada departamento puede arrendarse en $400 por mes. Sin embargo, por cada $10 mensuales de incremento, habrá dos departamentos vacíos, sin posibilidad de arrendarlos de nuevo.

a) ¿Qué arriendo por departamento maximizará el ingreso mensual?
b) ¿Cuántos departamentos se arriendan?
c) ¿Cuál es el ingreso máximo mensual?

6. Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno $18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada $ 0.50 menos en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

8. Suponga que la cantidad demandada semanalmente de cierto vestido se relaciona con el precio unitario ***p*** mediante la ecuación de demanda $p = \sqrt{900 - x}$, donde ***p*** está en dólares y ***x*** se refiere a los vestidos fabricados. ¿Cuántos vestidos deben fabricarse y venderse por semana para maximizar los ingresos?
[Sugerencia: R(x) = px.]

9. La cantidad mensual demandada del reloj de pulso Swatch se relaciona con el precio unitario mediante la ecuación $p = \dfrac{50}{0{,}01x^2 + 1}$ $\quad 0 \le x \le 20$

donde ***p*** se mide en dólares y ***x*** en unidades de miles.
¿Cuántos relojes se deben vender para obtener el máximo ingreso?

10. Si 200 personas solicitan un vuelo charter, la agencia de viajes Leisure World cobra \$ 300 por persona. Ahora bien, si lo solicitan más de 200 viajeros, cada tarifa se reduce \$1 por pasajero adicional. Determine cuántos pasajeros aportan el ngreso máximo a la agencia de viajes. ¿Cuál es el ingreso máximo? ¿Cuál será la tarifa de cada pasajero en cada caso?

Costos

11. El costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es $0{,}11 + \dfrac{s}{300}$ dólar es por km, donde ***s*** es la velocidad (uniforme) del camión en km por hora. El salario del chofer es de \$12 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 km resulte lo más económico posible?

12. El costo promedio, en dólares, de la producción de ***x*** discos compactos en la compañía Lincoln está dado por $\bar{c}(x) = -0{,}0001x + 2 + \dfrac{2000}{x}$ $\quad 0 < x \le 6.000$

Muestre que $\bar{c}(x)$ siempre es decreciente en el intervalo (0, 6000).

15. Suponga que la fúnción de costo total por la fabrícación de cierto producto es **$C(x) = 0.2(0.01x^2 + 120)$** dólares, donde ***x*** representa las unidades producidas. Determine el nivel de producción que minimizará el costo promedio.

16. La gerencia de departamentos UNICO ha decidido cerrar un área de 800 m^2 fuera de su edificio para exhibir plantas y flores de ornato. Un lado estará formado por la pared externa de la tienda, dos lados estarán cubiertos con madera de pino y el cuarto lado con cerca de acero galvanizado. Si la madera de pino cuesta \$6 el m^2 y la cerca de acero cuesta \$3 el m, determine las dimensiones del área necesaria para minimizar los costos de construcción.

17. Si una caja abierta tiene una base cuadrada y un volumen de 108 $pulg^3$, construida mediante una hoja delgada de metal, encuentre las dimensiones de esa caja, suponiendo que en su construcción se utiliza la mínima cantidad de material.

18. Una caja rectangular debe tener una base cuadrada y un volumen de 20 cm^3; si el material de la base cuesta 30 centavos el cm^2, el material de los lados cuesta 10 centavos el cm^2 y el material de la tapa cuesta 20 centavos el cm^2, determine las dimensiones de la caja que se puede construir con un costo mínimo.

20. El gasto total mensual (en dólares) en que incurre la compañía musical Carlota por la producción de x unidades de sus guitarras de la serie Profesional está dado por la función **$C(x) = 0.001x^2 + l00x + 4000$**

a) Encuentre la función de costo promedio $\bar{c}(x)$

b) Determine el nivel de producción que genere el menor costo de producción promedio.

Ganancias

21. Las ganancias mensuales de la agencia de viajes Odyssey (en miles de dólares) dependen de la cantidad ***x*** de dinero invertido en publicidad cada mes, de acuerdo con la fórmula **$P(x)= -x^2 + 8x + 20$**
donde **x** se mide en miles de dólares. ¿Cuál debe ser el presupuesto mensual de publicidad de Odyssey para maximizar las ganancias mensuales?

22. La subsidiaria en México de la compañía Thermo-Master fabrica un termómetro para interiores y exteriores. La gerencia estima que la ganancia que puede lograr la compañia por la fabricación y venta de ***x*** unidades de termómetros por semana es **$P(x) = -0.001\ x^2 + 8x - 5000$** dólares. Encuentre los intervalos donde la función de ganancia **P** es creciente y los intervalos donde es decreciente.

23. Como resultado del mayor costo de la energía, la tasa de crecimiento de las ganancias de la compañía Venice, con 4 años de antiguedad, ha comenzado a declinar. La gerencia de Venice, después de consultar a expertos en energía, decide implantar ciertas medidas de conservación de la energía para reducir la cuenta de la misma. El director general indica que, de acuerdo con sus cálculos, la tasa de crecimiento de las ganancias de Venice deberá incrementarse de nuevo dentro de 4 años. Si las ganancias de Venice (en cientos de dólares) dentro de ***x*** años están dadas por la función

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50 \qquad 0 \le x \le 8$$

determine si la predicción del director general es precisa.

[Sugerencia: encuentre el punto de inflexión de la función **P** y estudie la concavidad de P]

24. Lynbrook West, un conjunto de departamentos, tienen 100 unidades de 2 dormitorios y las ganacias mensuales obtenidas por la renta de ***x*** departamentos están dadas por

$$P(x) = -10x^2 + 1760x - 50.000 \text{ dólares.}$$

¿Cuántas unidades se deben rentar para maximizar las ganancias mensuales por concepto de renta? ¿Cuál es la máxima ganancia mensual posible?

25. Las ganancias mensuales estimadas que puede alcanzar la corporación óe instrumentos de precisión Cannon por la fablicación y venta de ***x*** unidades de su cámara modelo M1 es **$P(x) = -0,04\ x^2 + 240x - 10.000$** dólares. ¿Cuántas cámaras debe producir Cannon cada mes para maximizar sus ganancias?

26. La gerencia de Trapee and Sons, Inc., productores de la famosa salsa picante Texa - Pep, estiman que sus ganancias por distribución y venta diaria de ***x*** cajas (cada caja contiene 24 botellas) de la salsa picante están dadas por

$$\mathbf{P(x) = -0{,}000002\,x^3 + 6x - 400} \text{ dólares.}$$

¿Cuál es la máxima ganancia posible de Trapee en un día?

27. La cantidad mensual demandada del disco de Walter Serkin con la sonata Claro de Luna de Beethoven, producida por Phonola, se reíaciona con el precio por disco. La ecuación

$$\mathbf{p = -0.00042\,x + 6} \qquad 0 \le x \le 12{,}000,$$

donde ***p*** denota el precio unitario en dólares y ***x*** es el número de discos demandados, relaciona la demanda con el precio.
El costo total mensual por la impresión y empacado de ***x*** copias de este disco clásico está dado por

$$\mathbf{C(x) = 600 + 2x - 0{,}00002\,x^2}, \qquad 0 \le x \le 20.000 \text{ dólares.}$$

¿Cuántas copias mensuales debe producir Phonola para maximizar sus ganancias?

[Sugerencia: los ingresos son R(x) = px y las ganancias son T(x) = R(x) - C(x).]

28. Un fabricante de raquetas de tenis ha determinado que el costo total **C(x)** (en dólares) por la producción de ***x*** raquetas por día está dado por

$$\mathbf{C(x) = 400 + 4x + 0.0001x^2}$$

cada raqueta deberá venderse a un precio **p** en dólares, donde **p** se relaciona con **x** mediante la ecuación de demanda

$$\mathbf{p = 10 - 0{,}0004x}.$$

Si es posible vender todas las raquetas fabricadas, ¿cuál es el nivel diario de producción que rinde la ganancia máxima para el fabricante?

Eficiencia

29. Un estudio de eficiencia realizado por la compañía de aparatos eléctricos EleIctra mostró que el número de walkie-talkies Space Cominander ensamblados por el trabajador promedió ***t*** horas después de iniciar su jornada de trabajo a las 8 am, está dado por

$$\mathbf{N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t} \qquad 0 \le t \le 4.$$

¿En qué momento del turno matutino trabaja el obrero con su máxima eficiencia?

31. El obrero promedio de Wakefield Avionics, Inc., puede ensamblar

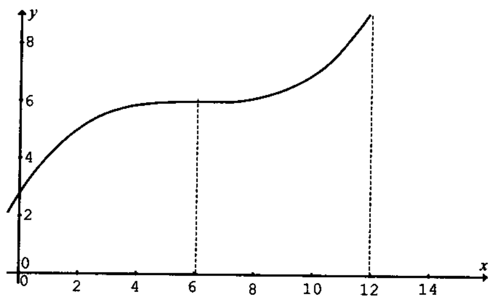
$$\mathbf{N(t)= -2\,t^3 + 12t^2 + 2t} \qquad 0 \le t \le 4$$

modelos de aeroplano controlados por radio, listos para volar, a **t** horas de comenzar su turno de trabajo, de las 8 am a las 12 del día. ¿En qué momento de su turno estará trabajando a su máxima eficiencia?

Demanda

32. La demanda semanal de los video discos fabricados por la compañía Herald está dada por $\mathbf{p = -0{,}0005\,x^2 + 60}$ donde ***p*** denota el precio unitario en dólares y ***x*** la cantidad demandada. La función de costos totales por semana relacionada con la producción de estos discos está dada por $C(x) = -0{,}001x^2 + 18x + 4000$, donde **C(x)** denota el costo total por la grabación de **x** discos. Encontrar el nivel de producción que genere la máxima ganancia para el fabricante.
[Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.]

33. La siguiente gráfica indica el número total de avisos "SE SOLíCITA ENFERMERA" en 22 ciudades durante los últimos 12 meses, como función del tiempo **t** (medido en meses).



a) Explique por qué **N'(t)** es positiva en el intervalo (0,12).
b) ¿Cuáles son los signos de **N"(t)** en el intervalo (0,6) y en el intervalo (6,12)?
c) Interprete los resultados de b).

34. Maximización de la producción

Una plantación de manzanas tiene una producción promedio de 36 cajones de manzanas por árbol y la densidad de árboles es de 22 árboles por acre. Por cada incremento unitario en la densidad de árboles, la producción se reduce 2 cajones. ¿Cuántos árboles se deben plantar para maximizar la producción?

35. Calidad ambiental

El Departamento del Interior de cierto país africano comenzó a registrar un indice de calidad ambiental para medir sus avances o retrocesos en la calidad ambiental de la vida salvaje. El índice durante los años 1984 a 1994 se aproxima mediante la función

$$I(t) = \frac{50t^2 + 600}{t^2 + 10}$$

a) Calcule $I'(t)$ y muestre que $I(t)$ disminuye en el intervalo (0, 10).
b) Calcule $I''(t)$. Estudie la concavidad de la gráfica de $I(t)$
c) Trace la gráfica de I
d) Interprete los resultados.

36. Producto interno bruto

El producto interno bruto (PIB) de un país en desarrollo de 1988 a 1996 se aproxima por la función

$$\mathbf{G(t)= -0{,}2\,t^{3} + 2{,}4\,t^{2} + 60} \qquad 0 \le t \le 8$$

donde **G(t)** se mide en miles de millones de dólares y **t** = 0 corresponde al año 1988. Grafique la función **G(t)** e interprete los resultados.

37. Asistencia a un seminario

La empresa IES (Imperial Educational Services) está pensando en ofrecer un seminario sobre asignación de recursos a directivos. Para hacer el ofrecimiento económicamente factible, IES considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de $50 cada una. La IES acepta reducir la cuota en $1,25 por cada persona adicional de las primeras 30. ¿Cuánta gente debe inscribirse para que el ingreso de IES se máximice? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

38. Efecto de la publicidad sobre las ventas

Las ventas totales **S**, en miles de dólares, de la corporación de instrumentos de precisión Cannon se relaciona con la cantidad de dinero ***x*** que Cannon gasta en publicar sus productos mediante la función

$$\mathbf{S(x)= -0.002x^{3} + 0{,}6x^{2} + x + 500} \qquad 0 \le x \le 200$$

donde ***x*** se mide en miles de dólares. Determine el punto de inflexión de la función **S(x)** y analice su significado.

39. Superávit en seguridad social

Con base en los datos de la Social Security Administration, el efectivo estimado en los fondos de seguridad social de Estados Unidos para el retiro y discapacitados en las 5 décadas, a partir del año 1990, está dado por

$$\mathbf{A(t) = -96{,}9\,t^{4} + 403{,}6\,t^{3} + 660{,}9\,t^{2} + 250} \qquad 0 \le t \le 5$$

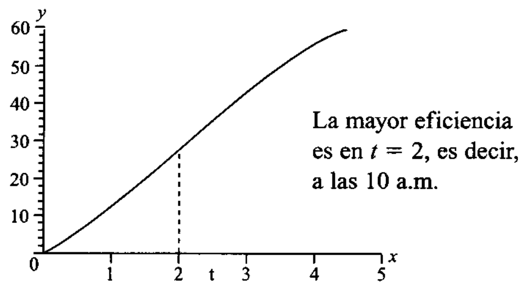
donde **A(t)** se mide en miles de millones de dólares y ***t*** se mide en décadas, con t = 0 correspondiente al ario 1990. Muestre que el superávit en seguridad social tendrá su máximo nivel aproximadamente a principios del ario 2030.
[Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática]

RESPUESTAS

1. 625 unidades; $4
2. 750 unidades
3. 130 unidades, p = $340, P = $36,980; 125 unidades, p = $350, P = $34,175
4. 525 unidades, p = $51, P = $10,525
5. a) $450
   b) 90 departamentos
   c) $40,500
6. $17, $86,700
7. Asintota horizontal y = 120. Los ingresos no exceden los $120.000.000.
8. 600 vestidos
9. 10.000 relojes
10. $62.500; $250
11. 60 km/hora
12. $\bar{c}\,'(x) = -0.0001 - \dfrac{2000}{x^2} < 0.$
13. a) x= 100
    b) No
    c) Sí
14. a) x = 0
    b) 2,2
15. 110 unidades

16 $\dfrac{16}{3} \times \dfrac{16}{3} \times \dfrac{4}{3}$ pulgadas

17. Min $a^2 + 4ab$, si $a^2b = 108$. Dimensiones: 6 x 6 x 3 pulgadas.
18. Min $0{,}30a^2 + 0{,}10 \times 4 \text{ X } ab + 0{,}20a^2$, si $a^2b = 20$. Dimensiones 2 x 2 x 5 pies
19. $x = 750\sqrt{2}$
20. a) $\bar{c}\,'(x) = 0.001x + 100 + \dfrac{4000}{x}$
    b) 2000
21. $4000
22. Creciente para 0 < x < 4000; decreciente para 4000 < x
23. La tasa de crecimiento es $T(x) = 3x^2 - 18x + 40$ y será creciente para x > 3.
24. 88 departamentos; $27,440
25. 3000 cámaras
26. $3600
27. 5000 copias
28. 6000 raquetas
29. 10 a.m.
30. →



31. 10 a.m.
32. 168 video discos
33. a) Porque el número de avisos es creciente;
    b) N''(t) <0 para 0 < t< 6 y N''(t) > 0 para 6 < t < 12;
    c) La tasa de crecimiento de los anuncios aumentó a partir del sexto mes.

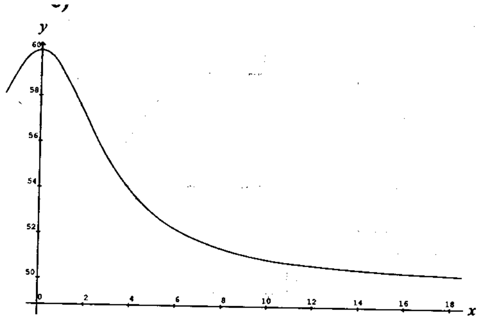
34. 20 árboles

35. a) $I'(t) = -\dfrac{200t}{(t^2+10)^2}$

b) $I''(t) = -\dfrac{200(10-3t^2)}{(t^2+10)^3}$, cóncava hacia arriba en $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3},\infty\right)$

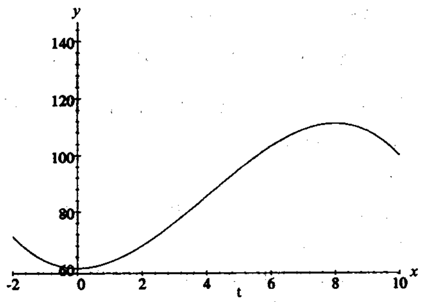
y hacia abajo en $\left(0,\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$

c)



d) La tasa de declinación de la calidad ambiental se incrementó durante los primeros 1.8 años (1 año y 9 meses aproximadamente). Después comenzó a disminuir.

36. La tasa de crecimiento fue máxima en 1992 (t = 4).



37. 35 personas

38. El punto de inflexión es (100 , 4600); las ventas aumentan rápidamente hasta que se gastan $100,000 en publicidad, después cualquier gasto adicional produce más ventas pero con una menor tasa de incremento.

39. Se debe derivar A(t)