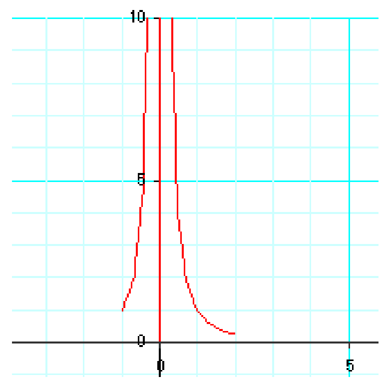
Integrales Impropias

Profesor: Haroldo Cornejo Olivari

Se dice que una integral es impropia si el intervalo de integración es infinito o el intervalo contiene una discontinuidad infinita.

Por ejemplo la integral $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ cuyo valor aparente es $-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}$ es un resultado incorrecto porque, si observamos la gráfica de la función, podemos observar que en x = 0 se produce una discontinuidad.



Se puede apreciar que $\frac{1}{x^2}$ se acerca al infinito cuando x = 0

Recordemos que el teorema del fundamental del cálculo se establece para funciones continuas, por lo tanto el resultado que se intentó dar es incorrecto.

En términos generales:

Si el intervalo de integración es infinito

1.- Si f(x) es continua en el intervalo [a, ∞[, entonces se define

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

2.- Si f(x) es continua en el intervalo]- ∞, a] , entonces se define

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)\,dx$$

3.- Si f(x) es continua en $\Re$, o sea en el intervalo]- ∞, ∞] , entonces se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{a}^{r} f(x)\,dx$$

donde a es cualquier número real

En los casos 1 y 2 se dice que la integral **converge** si el límite existe y que la integral **diverge** si el límite no existe.

En el caso 3 se dice que la integral **converge si ambas** integrales **convergen** y que **diverge** si al menos una de las integrales diverge

Si el intervalo de integración contiene una discontinuidad infinita

4.- Si f(x) es continua en el intervalo [a, b[, y en b existe una discontinuidad infinita, entonces se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^b f(x)dx$$

5.- Si f(x) es continua en el intervalo]a, b] , y en b existe una discontinuidad infinita, entonces se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_a^b f(x)dx$$

En los casos 4 y 5 se dice que la integral **converge** si el límite existe y que la integral diverge si el límite no existe.

6.- Si $c \in$]a, b[es una discontinuidad infinita de f(x) y f(x) es continua en el intervalo [a, b] –{c } , entonces se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{r \to c^+} \int_r^b f(x)dx$$

En el caso 6 se dice que la integral **converge si ambas** integrales **convergen** y que **diverge** si al menos una de las integrales diverge

Para el ejemplo que se presentó originalmente, se tiene que:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Guía Nº 1
Integrales impropias

Profesor : Haroldo Cornejo Olivari

Resolver las siguientes integrales impropias:

1.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$ resp : converge a ¼

2.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx$ resp : converge a –1

3.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ resp : diverge

4.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+9}\,dx$ resp : converge a $\frac{\pi}{6}$

5.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)x^2}\,dx$ resp: converge a ln[sen(1) + 1]

6.- $\displaystyle\int_0^{1} x^x\,[\ln(x)+1]\,dx$ resp : converge a 0

7.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]dx$ resp : converge a $e-2$

recordar que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

8.- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ resp : $\begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p<1 \\ \text{diverge} & \text{si } p>1 \end{cases}$

9.- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{e^x-1}\,dx$ resp : es divergente

10.- $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$ resp : $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{16}}+\frac{\pi}{8}$

11.- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\operatorname{sen}(x)]^x\,[x\cot(x)+\ln(\operatorname{sen}x)]dx$ resp : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{\pi}{4}}-1$

12.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x(1+x)}dx$ resp : es divergente

13.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$ resp : es divergente

14.- $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx$ resp : $6\left[1+\sqrt[3]{2}\right]$

15.- Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{5-x}} & \text{si} \quad x<5\\ \dfrac{1}{e^x} & \text{si} \quad x\geq 5\end{cases}$ calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ resp : $2\sqrt{5}+e^{-5}$