4.10.1 Problemas de aplicaciones de máximos y mínimos

En esta sección se muestra como usar la primera y segunda derivada de una función en la búsqueda de valores extremos en los llamados: **“problemas de aplicaciones”** o **“problemas de optimización”**. Aunque los ejemplos son esencialmente geométricos, ellos ilustran un procedimiento general.

Antes de enumerar los pasos que se deben seguir al abordar problemas que incluyen extremos absolutos, se enuncia sin demostración, un teorema, conocido como el **criterio de la segunda derivada**, el cual permite, en algunos casos, determinar, de una manera mas fácil, si un punto crítico dado corresponde a un máximo o a un mínimo relativo.

TEOREMA 1 (Criterio de la segunda derivada para extremos relativos)

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo abierto I, sea c un punto de I, tal que $f'(c) = 0$. Entonces:

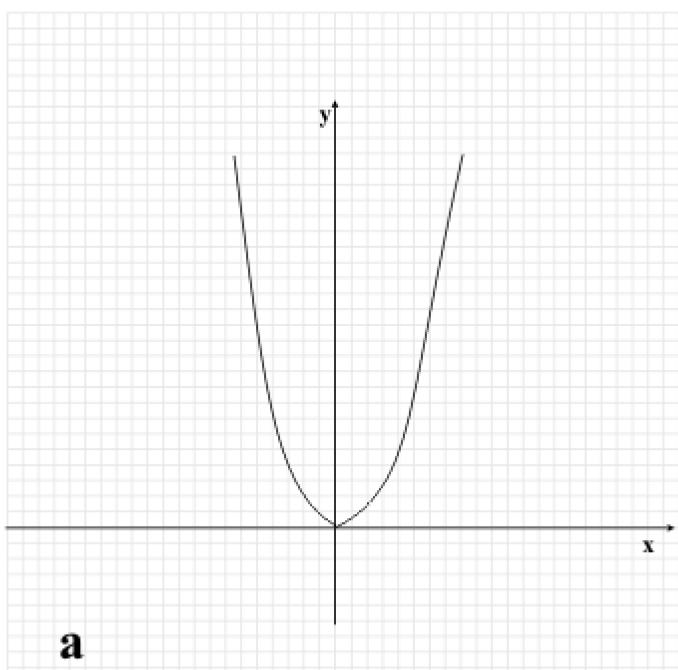
i. Si $f''(c) < 0$, entonces, f presenta un **máximo relativo** en c.

ii. Si $f''(c) > 0$, entonces, f presenta un **mínimo relativo** en c.

Observación:

Si $f''(c) = 0$, entonces, la naturaleza del punto crítico c no queda determinada, como lo ilustran los siguientes casos:

La función, $f(x) = x^4$, satisface: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Sin embargo, $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$ (fig. 4.21 (a)).



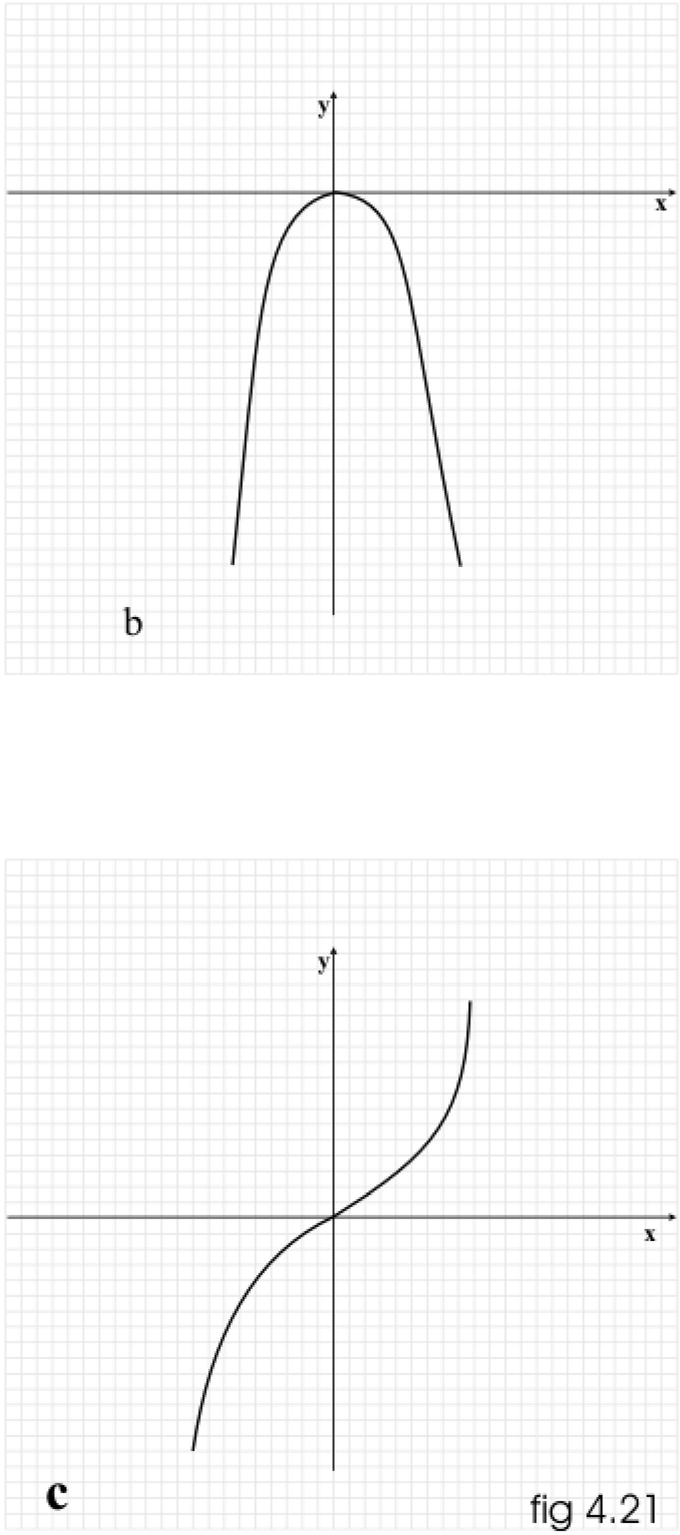


fig. 4.21

Igualmente, la función: $g(x) = -x^4$, satisface: $g'(0) = 0$ y $g''(0) = 0$. Sin embargo, $g(x)$ presenta un máximo relativo en $x = 0$ (fig. 4.21 (b)).

También, la función, $h(x) = x^3$, satisface: $h'(0) = 0$ y $h''(0) = 0$, pero $h(x)$ es creciente en todo el eje real y no presenta extremo relativo en $x = 0$ (fig. 4.21 (c)).

En lo que sigue se considerarán algunos problemas cuya solución es un extremo absoluto de una función definida en un intervalo cerrado. Se hace uso del **teorema 2 de la sección 4.22** (Teorema de los valores extremos), el cual garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y de un valor mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado.

Se enumeran a continuación algunos pasos que son útiles al abordar un problema de esta naturaleza.

1. Hacer hasta donde sea posible un dibujo indicando las variables que intervienen en el problema.

2. Determinar la función a maximizar o minimizar asi como el intervalo en el cual está definida.

3. Utilizar la información del problema para expresar la función obtenida en el paso 2., en términos de una sola variable.

4. Utilizar la regla práctica dada en la observación al teorema 2 de la sección 9.9.3. para encontrar extremos absolutos.

Se ilustra el procedimiento anterior con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

Los puntos A y B están situados uno frente al otro y en lados opuestos de un rio recto de 300 mts. de ancho. El punto D está a 600 mts. de B y en su misma orilla. (fig. 4.22). Una compañía de teléfonos desea tender un cable desde A hasta D. Si el costo por metro de cable es el 25% mas caro bajo el agua que por tierra. ¿Cómo se debe tender el cable, para que el **costo total sea mínimo**?.

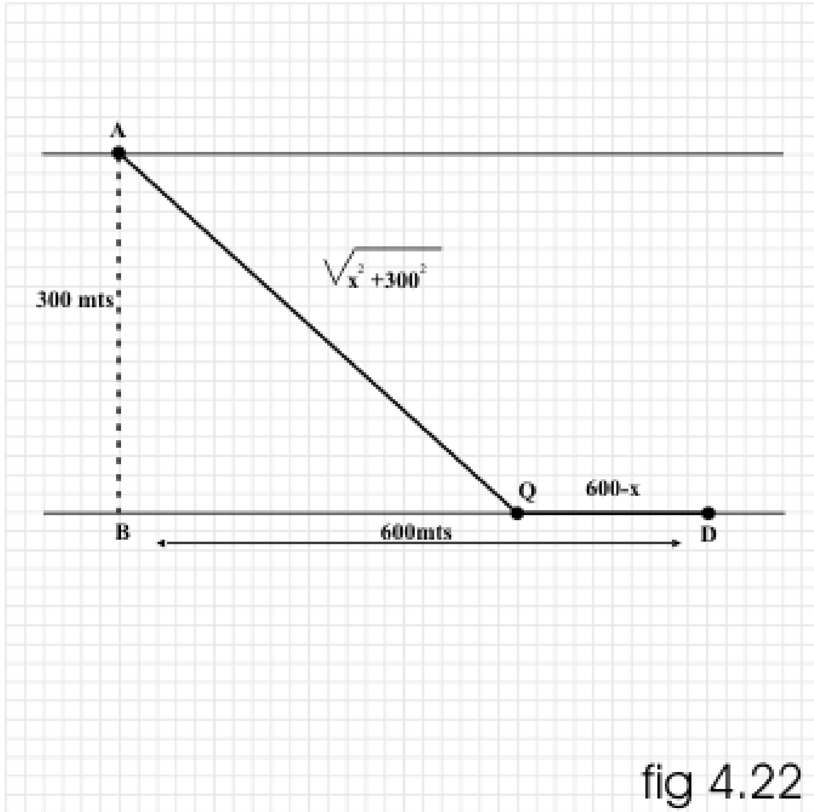


fig. 4.22

Solución:

Sea Q el punto sobre la misma orilla y a una distancia x de B donde termina el tramo de cable bajo el agua.

Se puede definir ahora las constantes y variables del problema:

x: distancia de B a Q; $0 \leq x \leq 600$
y: distancia de A a Q; (longitud de cable bajo el agua).
$600 - x$: distancia de Q a D; (longitud de cable por tierra).
k (const): costo por metro de cable por tierra.
$\frac{5}{4}k$ (const): costo por metro de cable por agua. $\left(\frac{5}{4}k = 1.25k\right)$
P : costo total **(función a minimizar)**.

De acuerdo al teorema de Pitágoras, $y = \sqrt{x^2 + 300^2}$ (1).

Ahora, la función costo total viene dada por:

$$C = \left(\frac{5}{4}k\right)y + k(600 - x) \qquad (2).$$

Sustituyendo (1) en (2), la función costo total puede escribirse en términos solamente de la variable x así:

$$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{x^2 + 300^2} + k(600 - x)\,; \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 600 \quad (\text{dominio de } C$$ *(x)*).

$$C(x) = \frac{5}{4}k\left(x^2 + 300^2\right)^{1/2} + k(600 - x) \qquad (3)$$

Como *C (x)* es una función continua en un intervalo cerrado, *C (x)* alcanza un valor máximo y un **valor mínimo** en [0, 600].

Al derivar en (3) e igualar a cero, se obtienen los puntos críticos:

$$C'(x) = \frac{5}{4}k \cdot \frac{1}{2}(2x)\left(x^2 + 300^2\right)^{-1/2} - k = 0$$

$$\Rightarrow \; k\left[\frac{5x}{4\left(x^2 + 300^2\right)^{1/2}} - 1\right] = 0 \quad \text{y como} \quad k \neq 0$$

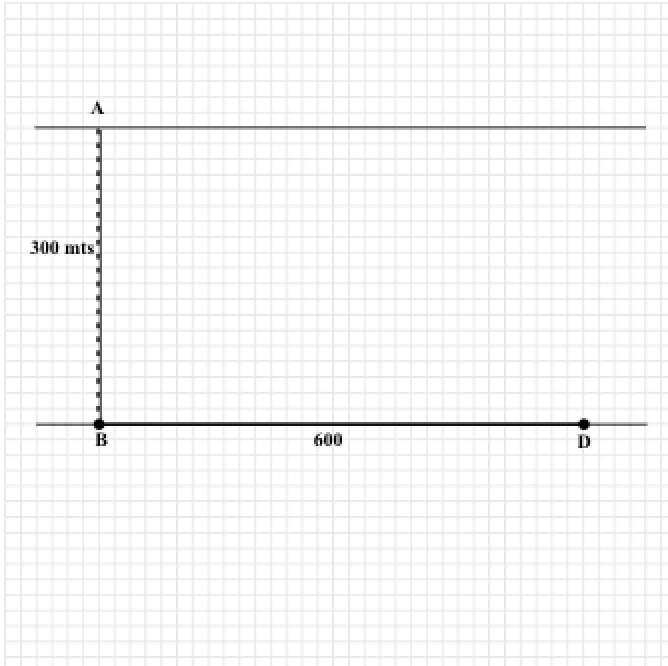
$$\Rightarrow \left[\frac{5x}{4\left(x^2 + 300^2\right)^{1/2}} - 1\right] = 0 \Rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 300^2} = 0$$

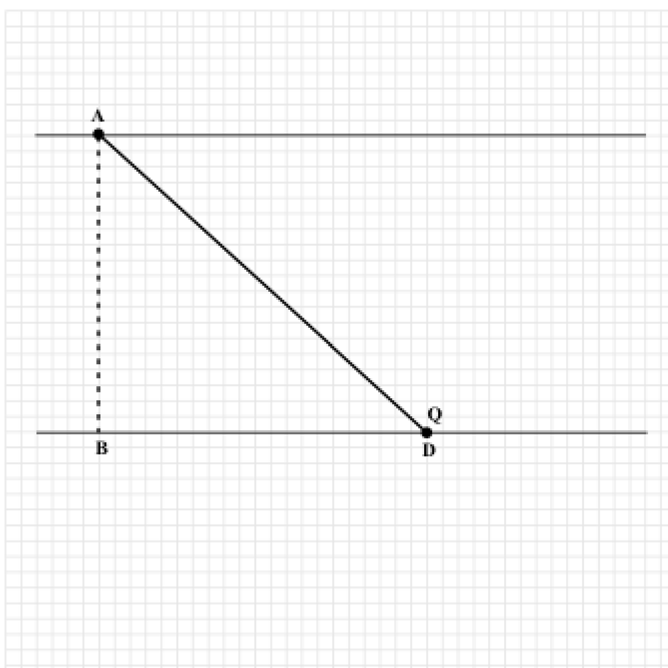
$$\Rightarrow 4\sqrt{x^2 + 300^2} = 5x\,.$$ De donde $x = 400$.

Asi que $x = 400$ es el único punto crítico y de acuerdo al criterio de la segunda derivada, corresponde a un mínimo relativo (verifíquelo). En consecuencia, el mínimo absoluto es el menor entre los siguientes valores: $C(0)$, $C(400)$ y $C(600)$.

$$C(0) = \frac{5}{4}k\sqrt{300^2} + 600\,k = 975\,k$$

Esto significa geométricamente, que el cable se tira desde A hasta B bajo el agua y desde B hasta D por tierra, implicando un gasto de $975\,k$ pesos. (fig. 4.23 (a))


A
300 mts
B
600
D


A
Q
B
D

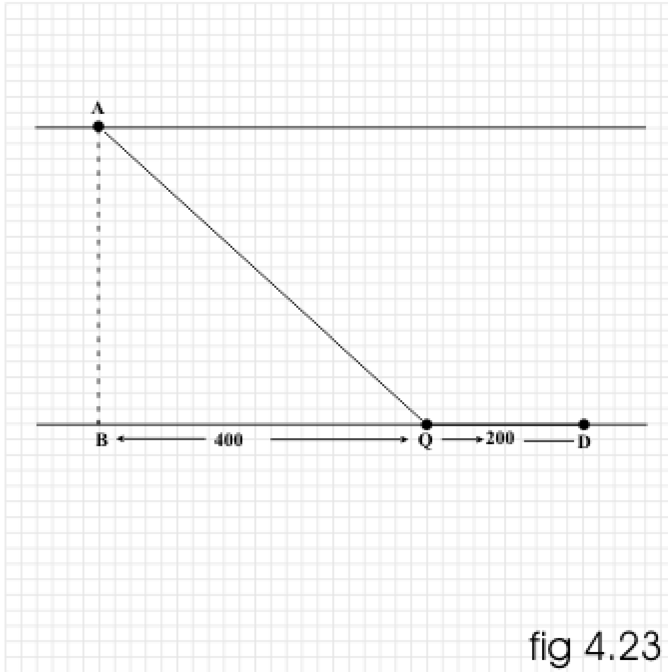


fig. 4.23

$C(600) = \frac{5}{4}k\sqrt{600^2 + 300^2} = 375\sqrt{5}k \approx 838.5k$. Esto indica geométricamente, que el punto Q coincide con D, y en este caso el cable se tiende directamente desde A hasta D por agua, demandando un gasto total de $375\sqrt{5}k \approx 838.5k$ pesos.. (fig. 4.23 (b)).

$C(400) = \frac{5}{4}k\sqrt{400^2 + 300^2} + 200k = 825k$. Esto significa que si el punto Q está a 400 mts. de B y se tiende el cable bajo el agua desde A hasta Q y por tierra desde Q hasta D, demandaría un gasto de $825k$ pesos, menor, para la compañía que los dos anteriores. (fig. 4.23 (c)).

Ejemplo 2.

Un alambre de 100 cm. de longitud, se corta en dos partes formando con una de ellas un círculo y con la otra un cuadrado. Cómo debe ser cortado el alambre para que:

a. La suma de las áreas de las dos figuras sea máxima.
b. La suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

Solución:

Supóngase que el alambre se parte a una distancia x de uno de sus extremos.

Si x es la longitud de la circunferencia, entonces $100 - x$ es el perímetro del cuadrado. (fig. 4.24)

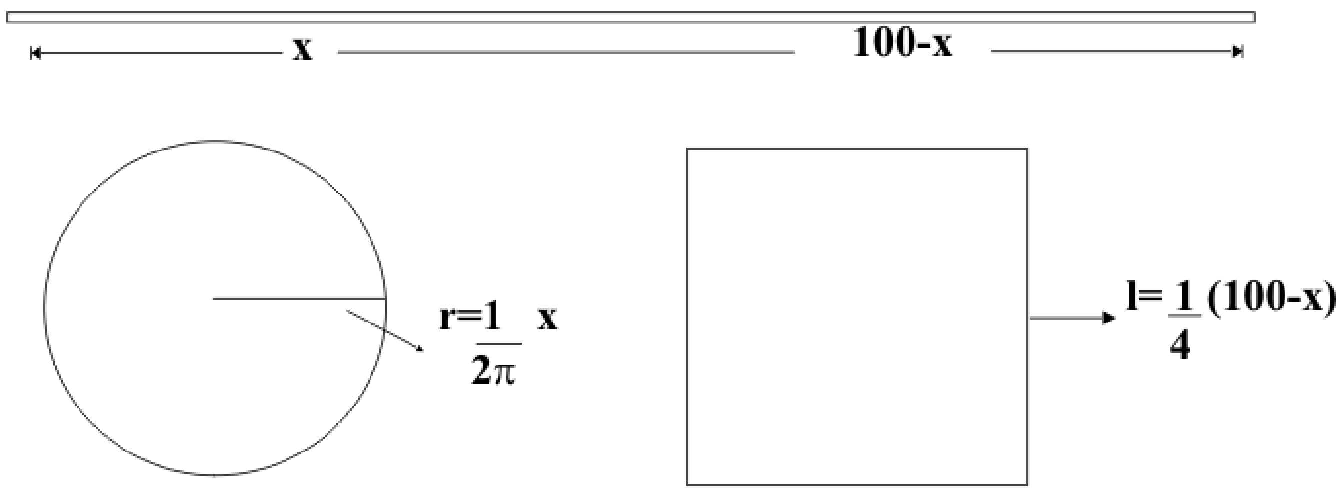


fig 4.24

fig. 4.24

Por lo tanto, el radio de la circunferencia es $\dfrac{x}{2\pi}$ y el lado del cuadrado es $\dfrac{100-x}{4}$.

Si *A (x)* es la función que representa la suma de ambas áreas, se tiene entonces:

$$A(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{1}{16}(100 - x)^2; \quad 0 \le x \le 100 \qquad (1)$$

Puesto que *A (x)* es una función continua en el intervalo [0, 100], entonces, existe un valor máximo y un valor mínimo de *A (x)* en [0, 100].

Al derivar (1) e igualar a cero, se obtienen los puntos críticos. En efecto:

$$A'(x) = \frac{1}{4\pi} \cdot 2x + \frac{1}{16} \cdot 2(-1)(100 - x)$$

$= \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{100 - x}{8} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{100\pi}{4 + \pi}$ es el único punto crítico y pertenece al intervalo $[0, 100]$ (Porqué?).

Además, por el criterio de la segunda derivada, dicho valor corresponde a un mínimo relativo.

Ahora, los valores máximo y mínimo de $A(x)$ está entre los valores: $A(0)$, $A(100)$ y $A\left(\dfrac{100\pi}{4 + \pi}\right)$.

Pero, $A(0) = \dfrac{1}{4\pi} \cdot 0^2 + \dfrac{1}{16}(100 - 0)^2 = \dfrac{100^2}{16}$

$$A(100) = \frac{1}{4\pi} \cdot 100^2 + \frac{1}{16}(100 - 100)^2 = \frac{100^2}{4\pi}$$

$$A\left(\frac{100\pi}{4 + \pi}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{100\pi}{4 + \pi}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(100 - \frac{100\pi}{4 + \pi}\right)^2 = \frac{100^2}{16 + 4\pi}$$

Como $4\pi < 16 < 16 + 4\pi$, entonces, $\dfrac{1}{16 + 4\pi} < \dfrac{1}{16} < \dfrac{1}{4\pi}$ y de esta última desigualdad, se deduce que:

$$\frac{100^2}{16 + 4\pi} < \frac{100^2}{16} < \frac{100^2}{4\pi} \Leftrightarrow A\left(\frac{100\pi}{4 + \pi}\right) < A(0) < A(100).$$

De esta forma, la última desigualdad indica que el **área máxima** se obtiene para $x = 100$, o sea, no partiendo el alambre y formando con el una circunferencia, mientras que el **área mínima** se obtiene partiendo el alambre a una distancia $\dfrac{100\pi}{4 + \pi}$ de uno de sus extremos, y, formando con esta primera parte una circunferencia y con la parte restante $\dfrac{400}{4 + \pi}$ un cuadrado.

Ejemplo 3.

Se dispone de una cartulina cuadrada de lado $\boldsymbol{a}$ y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado que se recorta para que el volumen de la caja sea máximo? ¿Cuál es el volumen de la caja?.

Solución:

Sea x: longitud del lado del cuadrado que se recorta en cada una de las esquinas (fig. 4.25 (a)), donde $0 \le x \le \frac{a}{2}$.

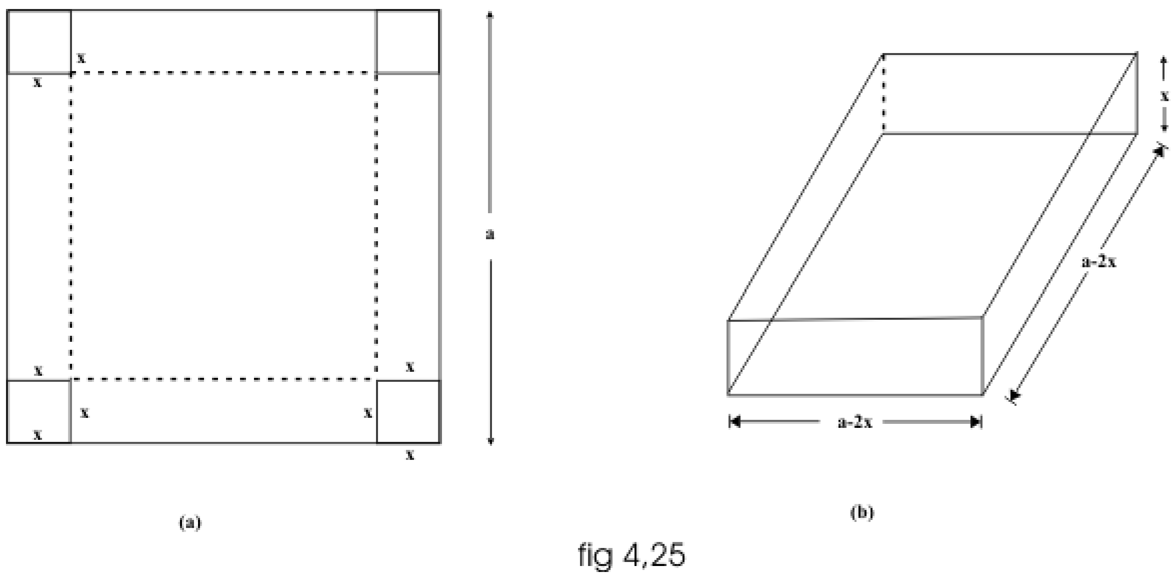


fig. 4.25

Al doblar la parte de cartulina restante, se forma la caja abierta que aparece en la fig. 4.25 (b).

Ahora, volumen de la caja = área de la base x altura. Esto es,

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x \; ; \quad 0 \le x \le \frac{a}{2} \qquad (1).$$

Puesto que *V (x)* **(función a maximizar)** es una función continua en el intervalo $\left[0, \frac{a}{2}\right]$, entonces *V (x)* alcanza un valor máximo y un valor mínimo en dicho intervalo.

Al derivar *V (x)* en (1) e igualar a cero, se obtienen los puntos críticos. En efecto:

$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = (2x - a)(6x - a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - a = 0 & \Rightarrow & x = \dfrac{a}{2} \\ \vee & & \vee \\ 6x - a = 0 & \Rightarrow & x = \dfrac{a}{6} \end{cases} \Bigg\rangle \text{ puntos críticos}$$

Para analizar la naturaleza de los puntos críticos, se usa el criterio de la segunda derivada.

Asi, $V''(x) = 24\,x - 8\,a$

$V''\left(\dfrac{a}{2}\right) = 24\left(\dfrac{a}{2}\right) - 8a = 4a > 0$, lo cual indica que $x = \dfrac{a}{2}$ corresponde a un mínimo relativo. (interprete geométricamente el resultado).

$V''\left(\dfrac{a}{6}\right) = 24\left(\dfrac{a}{6}\right) - 8a = -4a < 0$, lo cual indica que $x = \dfrac{a}{6}$ corresponde a un **máximo relativo**.

En consecuencia, el volumen máximo se obtiene recortando en las esquinas de la cartulina cuadrados de lado $\dfrac{a}{6}$ y se obtiene de esta forma una caja cuyo volumen viene dado por:

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}\,a^3 .$$

Ejemplo 4.

Dos pasillos de 6 y 9 pies de ancho están unidos en ángulo recto (Ver fig. 4.26). Encuentre la longitud de la barra recta mas larga que puede pasarse horizontalmente de un pasillo a otro por una esquina.

Solución:

Supóngase que la barra puede pasar horizontalmente, cuando esté en la posición como aparece en la figura adjunta.

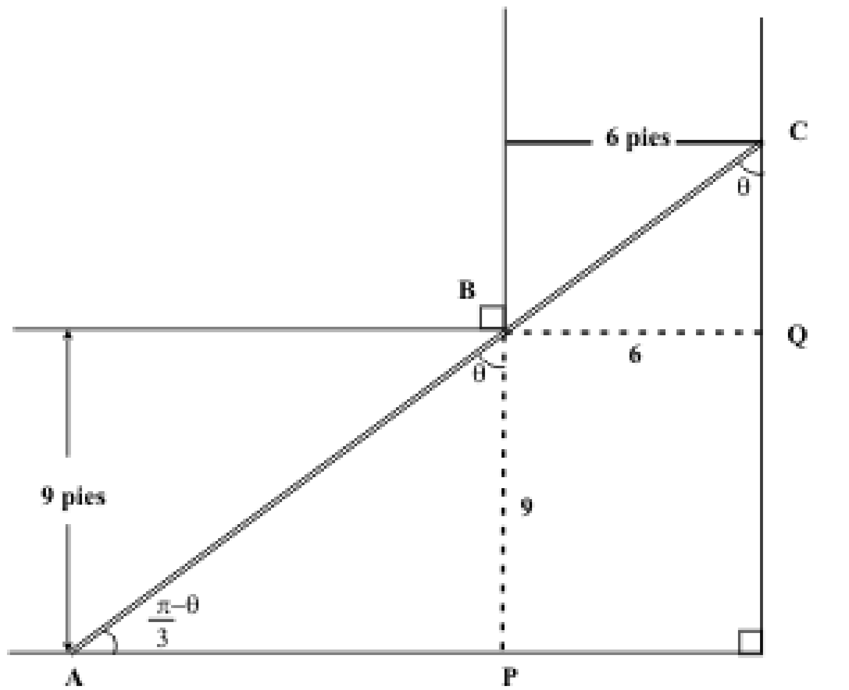


fig 4,26

Si θ (radianes) denota el ángulo que forma la barra con el pasillo menor, entonces $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ será el ángulo que forma con el pasillo mayor.

La longitud deseada es la longitud L **mínima** de la barra.

$L = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (1).

En el triángulo APB se tiene: $\sec\theta = \frac{\overline{AB}}{9} \therefore \overline{AB} = 9\sec\theta$ (2)

En el triángulo BQC se tiene: $\csc\theta = \frac{\overline{BC}}{6} \therefore \overline{BC} = 6\csc\theta$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene la función a maximizar:

$L(\theta) = 9\sec\theta + 6\csc\theta$ (4) ; $0 < \theta < \pi/2$

Note que $L \to +\infty$ cuando $\theta \to 0^+$ ó $\theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ (Porqué?)

Luego, $L'(\theta) = 9\sec\theta . \tan\theta - 6\csc\theta . \cot\theta$ (R.D. 15 y 16)

$$L'(\theta) = \frac{9}{\cos\theta}\cdot\frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} - \frac{6}{\text{sen}\ \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\text{sen}\ \theta}$$

$$= \frac{9\ \text{sen}\ \theta}{\cos^2\theta} - \frac{6\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{9\ \text{sen}^3\theta - 6\cos^3\theta}{\text{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta}$$

$$= \frac{3\cos^3\theta\left(3tan^3\theta - 2\right)}{\text{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta}$$

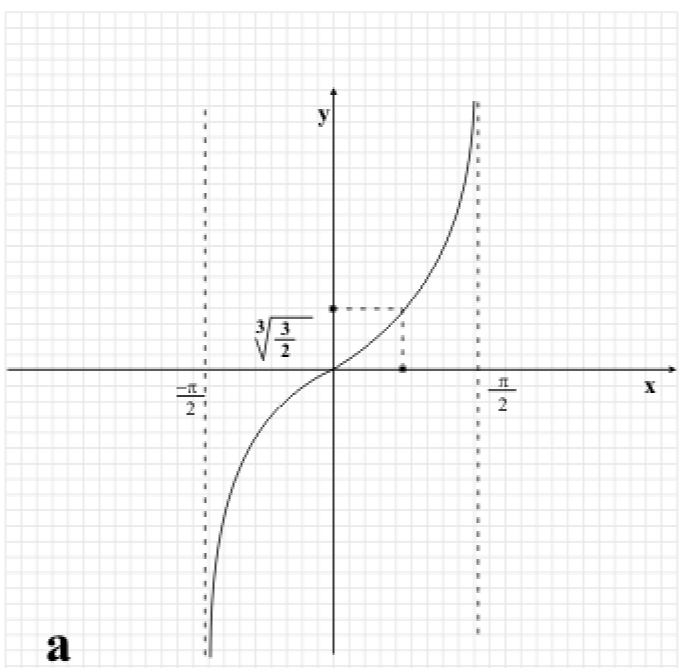
$$= \frac{3\cos\theta\left(3tan^3\theta - 2\right)}{\text{sen}^2\theta} \qquad (5)$$

Asi que $L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow tan\ \theta = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \theta = tan^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$

$$\theta \approx 0.718 \quad \text{(Rad.)}$$

Ahora, el signo de $L'(\theta)$ solo depende del signo del factor $\left(3tan^3\theta - 2\right)$.

Para ello, considere la gráfica de la función tangente (fig. 4.27 (a)) y en la cual se ha señalado el valor de $tan\ \theta$ para $\theta \approx 0.718$.



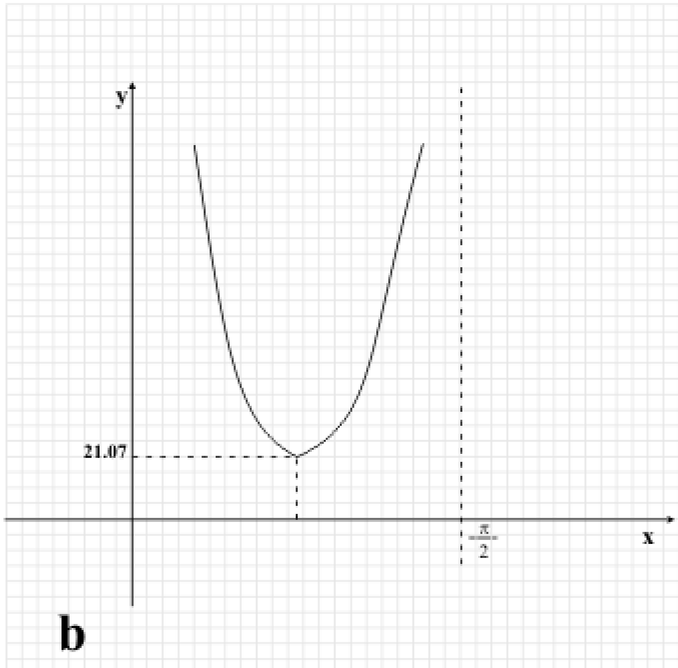


fig. 4.27

A la izquierda de $\theta = 0.718$, $tan\ \theta < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, con lo cual, $tan^3\theta < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3tan^3\theta - 2 < 0 \Leftrightarrow L'(\theta) < 0$.

A la derecha de $\theta = 0.718$, $tan\ \theta > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, con lo cual, $tan^3\theta > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3tan^3\theta - 2 > 0 \Leftrightarrow L'(\theta) > 0$.

Del análisis anterior, se deduce que $\theta \approx 0.718$ (Rad.) corresponde a un mínimo relativo de *L(θ)* y cuya gráfica se parece a la de la fig. 4.27 (b).

Esto significa que el valor **mínimo absoluto** de L (y por lo tanto, la longitud máxima de la varilla en cuestión) es:

$$L(0.718) = 9 \cdot \sec(0.718) + 6 \csc(0.718)$$

Un procedimiento algebráico, para obtener el valor exacto de L es el siguiente:

Como, $\quad \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}}$

$$= \frac{\sqrt{3^{2/3}+2^{2/3}}}{3^{1/3}}$$

y, $\quad \csc\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}}$

$$= \frac{\sqrt{2^{2/3}+3^{2/3}}}{2^{1/3}}$$

Se tiene que:

$$L = 9\sec\theta + 6\csc\theta$$

$$= \frac{9}{3^{1/3}}\left(3^{2/3}+2^{2/3}\right)^{1/2} + \frac{6}{2^{1/3}}\left(3^{2/3}+2^{2/3}\right)^{1/2}$$

$$= 3\left(3^{2/3}+2^{2/3}\right)^{1/2}\left[\frac{3}{3^{1/3}}+\frac{2}{2^{1/3}}\right] \qquad \text{(factor común)}$$

$$= 3\left(3^{2/3}+2^{2/3}\right)^{1/2}\left[3^{2/3}+2^{1/3}\right]$$

$= 3\left(3^{2/3}+2^{2/3}\right)^{3/2}$ es la longitud de la barra que cumple las condiciones del problema.