MÉTODOS DE INTEGRACION

En este tema se continúa con los métodos de integración iniciados en el capítulo anterior, en el que a partir del concepto de primitiva y de las derivadas de las funciones elementales se obtenían las integrales inmediatas, bien de forma directa, bien por cambio de variable.

Se estudiarán las técnicas más elementales para reducir a inmediatas aquellas integrales que no lo sean: integración por partes, integrales de cocientes de polinomios por descomposición en fracciones simples y fórmulas de reducción.

Todos los métodos de integración tienen por objetivo transformar una integral dada, no inmediata, en otra, o suma de varias, cuyo cálculo resulte más sencillo.

La integración por partes consiste en descomponer una integral en una suma de un producto de funciones más una integral que, pretendidamente, es más sencilla que la de partida.

La descomposición en fracciones simples de un cociente de polinomios transforma éste en una suma de fracciones cuyas integrales pueden solucionarse con facilidad.

Por último, las fórmulas de reducción permiten, en algunos casos, resolver integrales que dependen de un número natural *n* si se conoce el valor de la integral que depende del número anterior o ante-anterior. Así, por ejemplo, a partir de

$$\int sen^0 x\ dx = \int 1\ dx = x \quad \text{y} \quad \int sen\ x\ dx = -\cos x,$$

va a ser posible calcular las integrales de $sen^2 x$, $sen^3 x$, $sen^4 x$, etc.

INTEGRACIÓN POR PARTES

Este método permite resolver un gran número de integrales no inmediatas.

1. Sean *u* y *v* dos funciones dependientes de la variable *x*; es decir, $u = f(x)$, $v = g(x)$.

2. La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, aplicada a $f(x) \cdot g(x)$, permite escribir,

$$d(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot f'(x)dx + f(x) \cdot g'(x)dx$$

3. Integrando los dos miembros,

$$\int d(f(x) \cdot g(x)) = \int g(x) \cdot f'(x)dx + \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

De la misma manera que $\int dx = x$, también $\int d(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g(x)$.

Por tanto, $f(x)\cdot g(x) = \int g(x)\cdot f'(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$. De aquí se obtiene que:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx$$

Ésta no es la fórmula usual de la integración por partes. Puesto que $u = f(x)$, $du = f'(x)dx$, y al ser $v = g(x)$, $dv = g'(x)dx$. Llevando estos resultados a la igualdad anterior,

$$\int u\ dv = u\cdot v - \int v\ du$$

<u>Cómo se resuelve una integral por partes</u>

Este método consiste en identificar *u* con una parte de la integral y *dv* con el resto, con la pretensión de que al aplicar la fórmula obtenida, la integral del segundo miembro sea más sencilla de obtener que la primera. No hay, y éste es el mayor problema de este procedimiento, una regla fija para hacer las identificaciones más convenientes. La resolución de un buen número de problemas es el mejor camino para adquirir la técnica necesaria.

No obstante, se suelen identificar con *u* las funciones de la forma x^m si *m* es positivo; si *m* es negativo, es preferible identificar con *dv* a $x^m dx$. También suelen identificarse con *u* las funciones *ln x, arc senx, arc tg x* y con *dv*, $e^x dx$, *sen x dx, cos x dx,* etc.

Antes de empezar a practicar este método se ha de tener presente que al hacer la identificación de *dv*, ésta debe contener siempre a *dx*.

Ejercicio: integración por partes

① Calcular $\int ln\ x\ dx$

Resolución:

Éste es uno de los casos más sencillos; la integral consta de una sola función, *ln x.*

- Haciendo $u = ln\ x$, y diferenciando, $du = \frac{1}{x}dx$

Necesariamente, $dv = dx$. Integrando ambos miembros, $\int dv = \int dx$. Es decir, $v = x$.

- Aplicando la fórmula, $\int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ ln\ x - x + C$

② Calcular $\int sen^2\ x\ dx$

Resolución:

Se puede resolver efectuando cambios distintos:

a) ● La identificación, en este caso, puede ser $u = sen\ x$ y $dv = sen\ x\ dx$

- De $u = sen\ x$ se deduce, diferenciando, que $du = cos\ x\ dx$.
- De $dv = sen\ x\ dx$, integrando, $\int dv = \int sen\ x\ dx$, es decir, $v = -\cos x$
- Aplicando la fórmula, $\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$,

$$\int sen^2 x\ dx = sen\ x\ (-\cos x) - \int (-\cos x)\ \cos x\ dx = -sen\ x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\ dx$$

Puesto que $cos^2 x = 1 - sen^2 x$,

$$\int sen^2 x\ dx = -sen\ x\ \cos x + \int (1 - sen^2 x) dx = -sen\ x \cos x + \int dx - \int sen^2 x\ dx$$

$$\int sen^2 x\ dx = -sen\ x\ \cos x + x - \int sen^2 x\ dx$$

Al volver a obtener en el segundo miembro la integral de partida puede llegarse a la conclusión de no haber avanzado en el propósito de calcular la integral. No es así en este caso, pasando al primer miembro $-\int sen^2 x\ dx$, se obtiene

$2 \cdot \int sen^2 x\ dx = x - sen\ x\ \cos x$. Y pasando el 2 al segundo miembro,

$$\int sen^2 x\ dx = \frac{x - sen\ x\ \cos x}{2} + C$$

b) - Esta integral admite también la identificación $u = sen^2 x$, $dv = dx$
- Diferenciando u, $du = 2\ sen\ x\ cos\ x\ dx = sen\ 2x\ dx$
- Integrando dv, $\int dv = \int dx \Rightarrow v = x$.
- Aplicando la fórmula de integración por partes,

$$\int sen^2 x\ dx = sen^2 x \cdot x - \int x\ sen\ 2x\ dx \quad (1)$$

Y aquí es necesario volver a integrar por partes $\int x \cdot sen\ 2x\ dx$

- Si $u = x$, $du = dx$.

Si $dv = sen\ 2x\ dx$, $v = \int sen\ 2x\ dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot sen\ 2x\ dx = -\frac{1}{2} \cos\ 2x$

$$\int x \cdot sen\ 2x\ dx = -\frac{1}{2} x\ \cos 2x - \int -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x\ \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x\ \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2\ \cos 2x\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\ cos\ 2x + \frac{1}{4}sen\ 2x$$

● Volviendo a la igualdad (1)

$$\int sen^2 x\ dx = x\ sen^2 x + \frac{x}{2}cos\ 2x - \frac{1}{4}sen\ 2x + C$$

No hay que dejarse engañar por la apariencia de que los resultados que se han obtenido son distintos; en realidad son iguales. Si en la segunda expresión se sustituye *cos* 2*x* por su valor, $cos^2 x - sen^2 x$, y *sen* 2*x* por el suyo, 2 *sen x cos x*, se obtiene:

$$x\ sen^2 x + \frac{x}{2}(cos^2 x - sen^2 x) - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot sen\ x\ cos\ x =$$

$$= x\ sen^2 x + \frac{x}{2}cos^2 x - \frac{x}{2}sen^2 x - \frac{1}{2}sen\ x\ cos\ x =$$

$$= \frac{x}{2}(sen^2 x + cos^2 x) - \frac{1}{2}sen\ x\ cos\ x =$$

$$= \frac{x}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}sen\ x\ cos\ x = \frac{x - sen\ x\ cos\ x}{2}$$

③ Resolver $\int arc\ sen\ x\ dx$

Resolución:

•La identificación obligada es $u = arc\ sen\ x$; así $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

$dv = dx$, de donde $v = \int dx = x$

● Aplicando la fórmula,

$$\int arc\ sen\ x\ dx = x\cdot arc\ sen\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx =$$

$$= x\ arc\ sen\ x - \int x\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ dx = x\ arc\ sen\ x - \left(-\frac{1}{2}\right)\int -\ 2\ x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ dx =$$

$$= x \text{ arc sen } x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} =$$

$$= x \text{ arc sen } x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

④ Calcular $\int x \cdot \sqrt{1+x}\, dx$

Resolución:

- Llamando $u = x$, $du = dx$;

$$dv = \sqrt{1+x}\, dx,\ v = \int \sqrt{1+x}\, dx = \int (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

- $\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\, dx =$

$$= \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x}{3}\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5} + C$$

⑤ Hallar $\int x^2 \cdot e^x dx$

Resolución:

- Se hace la identificación $u = x^2$; diferenciando, $du = 2x\, dx$
- $dv = e^x dx$, integrando, $v = \int e^x dx = e^x$
- Aplicando la fórmula,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\, dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx \quad (1)$$

- Se vuelve a integrar por partes $\int x\, e^x dx$
- $u = x$, $du = dx$; $dv = e^x dx$, $v = \int e^x dx = e^x$

● Así,

$$\int x \cdot e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x = e^x\,(x-1)$$

● Llevando este resultado a (1),

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2e^x\,(x-1) = e^x\left[x^2 - 2\,(x-1)\right] = e^x\,(x^2 - 2x + 2) + C$$

INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES

Se trata de resolver integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ en las que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Integrales racionales inmediatas

Son aquellas que se convierten en suma de integrales inmediatas sin más que dividir *p(x)* entre *q(x)*. Para ello es preciso que el grado de *p(x)* sea mayor o igual que el grado de *q(x)*.

Se sabe que en una división $D = d \cdot c + r$. Dividiendo ambos miembros entre el divisor, d ,

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot c}{d} + \frac{r}{d} = c + \frac{r}{d}$$

En general, para polinomios, si *p(x)* es el dividendo, *q(x)* el divisor, *c(x)* el cociente y *r(x)* el resto,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Por consiguiente, $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right] dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx.$

Ejercicio: cálculo de integrales de funciones racionales

① Calcular $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Resolución:

•Se divide x^2 entre $x^2 + 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

● El cociente es 1 y el resto - 1.

$$\bullet \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - arc\ tg\ x + C$$

② Hallar $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} dx$

Resolución:

● Se dividen los polinomios.

$x^2 - 5x + 4 = (x + 1)(x - 6) + 10$

El cociente es $x - 6$ y el resto 10.

● $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} dx = \int \left[(x - 6) + \frac{10}{x + 1} \right] dx =$

$$= \int x\, dx - \int 6\, dx + 10 \int \frac{dx}{x + 1} = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\ \ln |x + 1| + C$$

Hay, no obstante, integrales racionales que no se convierten tan fácilmente en inmediatas. Para resolverlas es preciso hacer uso de la descomposición en fracciones simples.

INTEGRALES DE COCIENTES (I)

Una *fracción simple* es cualquier fracción propia de polinomios (el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador), cuyo denominador sea de la forma $(ax + b)^n$ ó $(ax^2 + bx + c)^n$ si el polinomio $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, y n es un número natural.

Así, $\frac{3}{x + 4}$; $\frac{5x - 2}{x^2 + x + 3}$; $\frac{x - 3}{(2x + 1)^3}$ son fracciones simples.

Al hacer el estudio de integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, se supondrá que el grado del numerador, $p(x)$, es estrictamente menor que el grado del denominador, pues si el grado del numerador fuese mayor o igual al grado del denominador, se dividiría $p(x)$ entre $q(x)$, obteniéndose un cociente $c(x)$ y un resto $r(x)$, en cuyo caso la integral

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ se convierte en $\int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right] dx$.

La integral $\int c(x) dx$ es inmediata por tratarse de un polinomio y la integral $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ es del caso supuesto, ya que el grado del resto, $r(x)$, en una división de polinomios, es estrictamente menor que el grado del divisor $q(x)$.

<u>Método de integración por descomposición en fracciones simples</u>

Para resolver este tipo de integrales

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

se procede del siguiente modo:

1. Se descompone factorialmente el polinomio *q(x)*, es decir, se hallan las raíces de la ecuación *q(x)* = 0.

2. Se descompone la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones simples como se verá en los ejemplos.

3. Se integran los sumandos que resulten.

Ahora bien, al resolver la ecuación *q(x)* = 0 es posible encontrar resultados distintos y éstos se pueden clasificar en tres casos:

- obtención de raíces simples (ninguna raíz está repetida).
- obtención de raíces múltiples (al menos hay una raíz repetida).
- obtención de raíces imaginarias (números complejos).

Hay que estudiar, pues, cada uno de los casos.

A) *Se obtienen raíces reales simples.*

Si x_1, x_2, ..., x_n son las raíces simples de *q(x)*, se tiene:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int\left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}\right)dx =$$

$$= \int \frac{A_1}{x-x_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-x_2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-x_n}\,dx$$

A_1, A_2, ..., A_n son constantes que se tienen que determinar. Como se aprecia, las integrales que resultan son inmediatas.

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular la integral $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 1}\,dx$

Resolución:

● Al ser el grado del numerador, 3, mayor que el del denominador, 2, se dividen los polinomios y se obtiene:

$x^3 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x - 3) + (x - 2)$

- $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 1}\, dx = \int \left(x - 3 + \frac{x - 2}{x^2 - 1} \right) dx =$

$$= \int (x - 3)\, dx + \int \frac{x - 2}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{x + 2}{x^2 - 1}\, dx.$$

- Las raíces de $x^2 - 1$ son: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Tiene, por tanto, dos raíces simples distintas, 1 y - 1.

- Se descompone $\frac{x - 2}{x^2 - 1}$ en fracciones simples:

$$\frac{x - 2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1}$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores también han de serlo:

$$x - 2 = A(x + 1) + B(x - 1).$$

Para determinar A y B, se dan valores a x:
si $x = 1$, $1 - 2 = A(1 + 1) + B(1 - 1)$, $-1 = 2A$, $A = -1/2$
si $x = -1$, $-1 - 2 = A(-1 + 1) + B(-1 - 1)$, $-3 = -2B$, $B = 3/2$
Debe hacerse notar que, aunque a x se le pueden dar valores arbitrarios, en este caso se han elegido aquellos que anulan uno de los sumandos para simplificar los cálculos. Éste será un procedimiento muy generalizado.

Así pues: $\frac{x - 2}{x^2 - 1} = \frac{-1/2}{x - 1} + \frac{3/2}{x + 1}$, por lo que

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{-1/2}{x - 1}\, dx + \int \frac{3/2}{x + 1}\, dx = -\frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{3}{2} \ln |x + 1|$$

Finalmente, $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{3}{2} \ln |x + 1| + C$

B) *Se obtienen raíces reales múltiples.*

Si a es una raíz múltiple de multiplicidad n (está repetida n veces), la descomposición en fracciones simples de $\frac{p(x)}{(x - a)^n}$ es

$$\frac{p(x)}{(x - a)^n} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

A_1, A_2, A_3, ..., A_n vuelven a ser constantes a determinar. De nuevo, las integrales de la forma $\int \frac{A_i}{(x-a)^i}dx$ son inmediatas.

Ejemplo: cálculo de integrales

① Calcular $\int \frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}dx$

Resolución:

● Como el grado del numerador, 2, es menor que el del denominador, 3, no se dividen los polinomios.

● Las raíces del polinomio $x^3 - 3x + 2$ se obtienen aplicando la regla de Ruffini:

$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$

El polinomio tiene una raíz simple, - 2, y una raíz múltiple, 1, de multiplicidad dos.

● La descomposición en fracciones simples de la fracción es:

$$\frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

● Como en el caso anterior, se igualan los numeradores y se dan valores arbitrarios a x para determinar *A, B* y *C*.

$x^2 + 3x - 5 = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$

Si $x = 1$, $\quad -1 = 3B \Rightarrow B = -1/3$

Si $x = -2$, $\quad -7 = 9C \Rightarrow C = -7/9$

Si $x = 0$, $\quad -5 = -2A + 2B + C = -2A - 2/3 - 7/9 \Rightarrow A = 16/9$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}dx = \int \frac{16/9}{x-1}dx + \int \frac{-1/3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-7/9}{x+2}dx =$$

$$= \frac{16}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int (x-1)^{-2}dx - \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{16}{9} ln\left|x-1\right| - \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{7}{9} ln\left|x+2\right| + C =$$

$$= \frac{16}{9} ln\left|x-1\right| - \frac{7}{9} ln\left|x+2\right| + \frac{1}{3(x-1)} + C$$

C) *Se obtienen raíces imaginarias*

Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz imaginaria $x = \alpha + i\beta$, su conjugada también es raíz del polinomio, $\overline{x} = \alpha - i\beta$. Si se multiplica $x - (\alpha + i\beta)$ por $x - (\alpha - i\beta)$, se obtiene:

$$(x - \alpha - i\beta)\,(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

(el número imaginario *i* verifica $i^2 = -1$).

Cada par de raíces imaginarias conjugadas determina una fracción simple de la forma $\dfrac{Ax + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$, por lo que se hace necesario aprender la técnica de resolución de integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx$.

1. Se suma y se resta al numerador $A\alpha$ y se descompone en las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{Ax + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx = \int \frac{Ax + B + A\alpha - A\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B + A\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \right) dx =$$

$$= \int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx + \int \frac{B + A\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx$$

Estas dos integrales son inmediatas aplicándoles un cambio de variable:

2. Al ser $\left[(x-\alpha)^2 + \beta\right] = 2\,(x-\alpha)$,

$$\int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right] + C_1$$

3. $$\int \frac{B + A\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\,dx = (B + A\alpha)\int \frac{dx}{\beta^2\left(1 + \dfrac{(x-\alpha)^2}{\beta^2}\right)} = \frac{B + A\alpha}{\beta^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

Puesto que la derivada de $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$ es $\dfrac{1}{\beta}$,

$$\frac{B + A\alpha}{\beta^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{B + A\alpha}{\beta^2}\int \frac{\beta \cdot \dfrac{1}{\beta} \cdot dx}{1 + \left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} =$$

$$= \frac{B + A\alpha}{\beta^2} \cdot \beta \int \frac{\frac{1}{\beta} dx}{1 + \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2} =$$

$$= \frac{B + A\alpha}{\beta} \cdot arc\ tg \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + C_2$$

4. Concluyendo:

$$\int \frac{Ax + \beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{A}{2} ln \left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right] + \frac{B + A\alpha}{\beta} arc\ tg \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + C$$

Obsérvese que $C_1 + C_2 = C$

Para este tercer caso sólo se estudiarán las integrales en las que las raíces imaginarias del denominador sean simples.

INTEGRALES DE COCIENTES (II)

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 5} dx$

Resolución:

● Al resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + 2x + 5 = 0$, se obtienen las raíces $- 1 + 2i$ y $- 1 - 2i$, por lo que

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1 - 2i)\ (x + 1 + 2i) = (x + 1)^2 + 4\ 1.$$

● Aplicando la fórmula anterior, $A = 3$, $B = -1$, $\alpha = -1$ y $\beta = 2$

$$\int \frac{3x - 1}{(x + 1)^2 + 4} dx = \frac{3}{2} ln \left[(x + 1)^2 + 4\right] - \frac{4}{2} arc\ tg \frac{x + 1}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2} ln \left[(x + 1)^2 + 4\right] - 2\ arc\ tg \frac{x + 1}{2} + C$$

A pesar de haber aplicado la fórmula, ésta no debe aprenderse de memoria ya que se olvida con suma facilidad. Es conveniente aplicar el proceso teórico paso a paso:

$$a)\ \int \frac{3x - 1}{(x + 1)^2 + 4} dx = \int \frac{3x - 1 + 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)}{(x + 1)^2 + 4} dx = \int \frac{3(x + 1) - 4}{(x + 1)^2 + 4} dx =$$

$$= \int \frac{3(x + 1)}{(x + 1)^2 + 4} dx + \int \frac{-4}{(x + 1)^2 + 4} dx.$$

Se resuelven por separado las dos integrales.

$b)\ \int \frac{3(x+1)}{(x+1)^2+4}dx = 3\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx.$ Si $u = (x+1)^2+4,\ u' = 2(x+1)$

Por tanto,

$$\int \frac{3(x+1)}{(x+1)^2+4}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+4}dx = \frac{3}{2}\ ln\left[(x+1)^2+4\right]+C_1$$

$c)\ (x+1)^2+4 = 4\left[\frac{(x+1)^2}{4}+1\right] = 4\left[\left(\frac{x+1}{4}\right)^2+1\right]$

Así, $\int \frac{-4}{(x+1)^2+4}dx = -4\int \frac{dx}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]} = -\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$

Llamando $u = \frac{x+1}{2}$, $u' = \frac{1}{2}$. Multiplicando y dividiendo por $\frac{1}{2}$:

$$-\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = -2\int \frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx = -2\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2}+C_2$$

d) Sumando los resultados de *b*) y *c*). ($C_1 + C_2 = C$),

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}dx = \frac{3}{2}\ ln\left[(x+1)^2+4\right]-2\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2}+C,$$

resultado igual al obtenido aplicando directamente la fórmula.

② Calcular $\int \frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x}dx$

Resolución:

● Se calculan las raíces del denominador.

$$x^3+6x^2+9x = x(x^2+6x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x^2+6x+9 = 0 \end{cases}$$

$$x^2+6x+9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

Tiene las raíces $x = 0$, simple, y $x = -3$, doble. Así,

$$x(x^2 + 6x + 9) = x(x + 3)^2$$

• Se descompone $\dfrac{2x+5}{x^3+6x^2+9x}$ en fracciones simples:

$$\frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx}{x(x+3)^2}$$

Igualando los numeradores,

$$2x + 5 = A(x + 3)^2 + Bx(x + 3) + Cx$$

Se dan valores a *x:*

$$\text{Si } x = 0, \quad 5 = A(0+3)^2 = 9 \cdot A \Rightarrow A = \frac{5}{9}$$

$$\text{Si } x = -3, \quad 2(-3) + 5 = -3C \Rightarrow -1 = -3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$\text{Si } x = 1; \quad 7 = 16A + 4B + C \Rightarrow 7 = 16 \cdot \frac{5}{9} + 4B + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 = 80 + 36B + 3 \Rightarrow -20 = 36B \Rightarrow B = -\frac{5}{9}$$

• Así,

$$\int \frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x}dx = \int \frac{5/9}{x}dx + \int \frac{-5/9}{x+3}dx + \int \frac{1/3}{(x+3)^2}dx =$$

$$= \frac{5}{9} \ln|x| - \frac{5}{9} \ln|x+3| + \frac{1}{3}\int (x+3)^{-2}dx =$$

$$= \frac{5}{9} \ln|x| - \frac{5}{9} \ln|x+3| + \frac{1}{3}\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{5}{9} ln\,|x| - \frac{5}{9} ln\,|x+3| - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+3} + C$$

③ Calcular $\int \frac{3x^2+5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}\,dx$

Resolución:

- Raíces de (x - 2) (x^2 + 2x + 4):

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + i\sqrt{3} \\ x_2 = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1 - i\sqrt{3})\,(x + 1 + i\sqrt{3}) = (x+1)^2 + 3$$

- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3x^2+5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x+1)^2+3} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+4) + (Mx+N)\,(x-2)}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}$$

- Se identifican los numeradores y se dan valores a x:

$$3\,x^2 + 5 = A(x^2 + 2x + 4) + (Mx + N)\,(x - 2)$$

Si $x = 2$, $17 = A \cdot 12 \Rightarrow A = \frac{17}{12}$

Si $x = 0$, $5 = 4A - 2N \Rightarrow 5 = \frac{17}{3} - 2N \Rightarrow N = \frac{\frac{17}{3} - 5}{2} \Rightarrow N = \frac{1}{3}$

Si $x = 1$, $8 = 7A - M - N \Rightarrow 8 = \frac{119}{12} - M - \frac{1}{3} \Rightarrow M = \frac{19}{12}$

- $\int \frac{3x^2+5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{\frac{17}{12}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{19}{12}x + \frac{1}{3}}{(x+1)^2+3}\,dx$

$\int \frac{\frac{17}{12}}{x-2}\,dx = \frac{17}{12} ln\,|x-2| + C_1$

$$\int \frac{\frac{19}{12}x + \frac{1}{3}}{(x+1)^2 + 3}\, dx = \frac{\frac{19}{12}}{2} \ln \left[(x+1)^2 + 3\right] +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3} + \frac{19}{12}(-1)}{\sqrt{3}} \, arc\ tg \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C_2 =$$

$$= \frac{19}{24} \ln \left[(x+1)^2 + 3\right] - \frac{5}{4\sqrt{3}} \, arc\ tg \left|\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right| + C_2$$

- Luego:

$$\int \frac{3x^2 + 5}{(x-2)\,(x^2 + 2x + 4)}\, dx =$$

$$= \frac{17}{12} \ln |x-2| + \frac{19}{24} \ln \left[(x+1)^2 + 3\right] - \frac{5}{4\sqrt{3}} \, arc\ tg \left|\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right| + C$$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

Hay integrales que no se pueden resolver por ninguno de los métodos descritos; sin embargo es posible encontrar unas fórmulas, llamadas de reducción, que permitirán resolver algunas integrales que dependen de un número natural *n*, siempre que se sepa resolver la integral para *n* - 1 ó *n* - 2.

Cálculo de $I_n = \int sen^n x\, dx$

Como se ve, el subíndice *n* de I_n coincide con el exponente de $sen^n x$.

Desde luego, $I_o = \int sen^0 x\, dx = \int 1 \cdot dx = x$

e $I_1 = \int sen\ x\, dx = -\cos x$

Para encontrar la fórmula de reducción de I_n se integrará por partes:

$$u = sen^{n-1} x, \quad du = (n-1) \cdot sen^{n-2} x \cdot \cos x\, dx$$

$$dv = sen\ x\, dx; \quad v = \int sen\ x\, dx = -\cos x$$

Por tanto, $I_n = -\cos x \cdot sen^{n-1} x - (n-1) \int -sen^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx$

$$I_n = -\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) \int sen^{n-2} x \cdot (1 - sen^2 x)\, dx$$

$$I_n = -\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) \int sen^{n-2} x\, dx - (n-1) \int sen^n x\, dx$$

$$I_n = -\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n$$

Pasando - (n - 1)I_n al primer miembro y despejando I_n,

$$I_n (1 + n - 1) = - \cos x \cdot sen^{n-1} x + (n - 1) \cdot I_{n-2}$$

$$n \cdot I_n = - \cos x \cdot sen^{n-1} x + (n - 1) \cdot I_{n-2}$$

De donde $I_n = \dfrac{-\cos x \cdot sen^{n-1} x}{n} + \dfrac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$

Así: $I_0 = x \quad I_1 = - \cos x$

$$I_2 = \int sen^2 x \, dx = -\frac{\cos x \, sen \, x}{2} + \frac{2-1}{2} \cdot x = \frac{\cos x \, sen \, x}{2} + \frac{1}{2} x$$

$$I_3 = \int sen^3 x \, dx = \frac{-\cos x \, sen^2 x}{3} + \frac{2}{3}(-\cos x)$$

Cálculo de $J_n = \int \cos^n x \, dx$

Para calcular $J_n = \int \cos^n x \, dx$,

basta darse cuenta que $\cos x = sen\,(90º - x)$, por lo que

$$J_n = \int \left[sen(90º - x)\right]^n dx,$$

y haciendo el cambio de variable $90º - x = y$, $dx = - dy$.

Así:

$$J_n = -\int sen^n y \, dy = \frac{\cos y \cdot sen^{n-1} y}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \int sen^{n-2} y \, dy$$

Volviendo a hacer el cambio $y = 90º - x$ se tiene:

$$\cos y = \cos(90º - x) = sen\, x;$$

$$sen^{n-1} y = sen^{n-1}(90º - x) = \cos^{n-1} x$$

$$y - \frac{n-1}{n} \cdot \int sen^{n-2}(90º - x)\,(-dx) = \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}$$

Concluyendo que:

$$J_n = \frac{sen\, x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}$$

Cálculo de la integral $I_n = \dfrac{dx}{(1+x^2)^n}$

Sumando y restando x^2 al numerador,

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx \quad (1)$$

La segunda integral se resuelve por partes:

u = x, du = dx

$$dv = \frac{x}{(1+x^2)^n}dx,\ v = \int \frac{x}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-n}dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1}$$

De donde,

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx = \frac{x}{2}\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2(-n+1)}\int (1+x^2)^{-n+1}dx =$$

$$= \frac{x}{2}\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2(-n+1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2}\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2(-n+1)} \cdot I_{n-1}$$

Volviendo a la expresión (1), se obtiene:

$$I_n = I_{n-1} - \frac{x}{2}\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} + \frac{1}{2(-n+1)} \cdot I_{n-1}$$

Operando,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Así, se obtendría, por ejemplo:

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x; \quad I_2 = \frac{1}{2} arc\ tg\ x + \frac{x}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

$$I_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} arc\ tg\ x + \frac{x}{2}\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{x}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Se debe tener presente que aunque existen métodos para calcular gran cantidad de integrales, éstos no siempre son sencillos; incluso hay integrales irresolubles.