PROBLEMAS DE PLANTEO
CON INTEGRALES INDEFINIDAS

Ejemplo:

Un minorista recibe un cargamento de 10.000 Kg. De arroz que se consumirán en un período de 5 meses a una razón constante de 2.000 kg. Por mes. Si el costo de almacenamiento es 1 centavo de dolar por kg. Al mes. ¡Cuánto pagará el minorista en costos de almacenamiento en los próximos 5 meses?

Solución

Sea S(t) el costo total de almacenamiento (en dólares) durante t meses. Como el arroz se consume a una razón constante de 2,000 kg al mes, la cantidad de kilogramos de arroz almacenados después de t meses es 10.000 – 2.000t. Por tanto, como el costo de almacenamiento es 1 centavo por kg al mes, la razón de cambio del costo de almacenamiento con respecto al tiempo es

$$\frac{ds}{dt} = \begin{pmatrix} \text{costo por} \\ \text{kilógramo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{número de} \\ \text{kilógramos} \end{pmatrix} = 0{,}01(10.000 - 2.000t)$$

Se concluye que S(t) es una antiderivada de

$0{,}01(10.000 - 2.000t) = 100 - 20t$

$$S(t) = \int \frac{dS}{dt}\,dt \quad = \quad \int (100 - 20\,t)\,dt$$

Es decir,

$$= 100\,t - 10\,t^2 + C$$

para alguna constante C.

Para determinar C, utilice el hecho de que en el momento en que llega el cargamento (cuando t = 0) no hay costos, de manera que

$$0 = 100(0) - 10(0)^2 + C \quad \text{ó} \quad C = 0$$

Por tanto, $S(t) = 100\,t - 10\,t^2$

y el costo total de almacenamiento durante los próximos 5 meses será

$$S(5) = 100(5) - 10(5)^2 = \text{US\$ } 250$$

Recuérdese que, si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento s(t), su velocidad está dada por $v = \frac{ds}{dt}$ y su aceleración por $a = \frac{dv}{dt}$ Si se conoce la aceleración del objeto, su velocidad y su desplazamiento pueden encontrarse mediante la integración.

Ejemplo

Después de aplicar los frenos, cierto automóvil disminuye la velocidad a una razón constante de 22 pies por segundo por segundo. Si en el momento de aplicar los frenos el automóvil viaja a 45 millas por hora (66 pies por segundo), ¿cuánto recorre el automóvil antes de detenerse por completo?

Solución

Sea s(t) el desplazamiento (distancia) del automóvil t segundos después de aplicar los frenos. Como el automóvil disminuye la velocidad a 22 pies por segundo, se tiene que a(t) = - 22 (el signo negativo indica que el automóvil disminuye la velocidad), y

$$\frac{dv}{dt} = -22$$

Al integrar, se tiene que la velocidad en el momento ***t*** está dada por

$$v(t) = \int -22 \; dt = -22\,t + C_1$$

Para calcular C_1, observe que v = 66 cuando t = 0, de manera que

$$66 = v(0) = -22(0) + C_1$$

y $C_1 = 66$. Así, la velocidad en el tiempo t es v(t) = -22t + 66 Luego, para hallar el desplazamiento s(t), comience con el hecho de que

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = -22\,t + 66$$

e integrando llegamos a que:

$$s(t) = \int (-22\,t + 66)\,dt = -11\,t^2 + 66\,t + C_2$$

Como s(0) = 0, $C_2 = O$ y $s(t) = -11\,t^2 + 66\,t$

Por último, para hallar la distancia recorrida, observe que el automóvil se detiene cuando v(t) = 0 y esto ocurre cuando v(t) = -22t + 66= O

Al resolver esta ecuación, se encuentra que el automóvil se detiene después de 3 segundos de disminuir la velocidad, y en ese tiempo ha recorrido

$$s(3) = 11(3)2 + 66(3) = 99 \text{ pies}$$

PROBLEMAS

1..- Se estima que dentro de t meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $4 + 5t^2$ personas por mes. Si la población actual es 10.000 personas, ¿cuál será la población dentro de 8 meses?

2.- Un objeto se mueve de manera que su velocidad después de t minutos es $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el tercer minuto?

3.- Un objeto se mueve de manera que su velocidad después de t minutos es $v(t) = 3 + 2t + 6t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el segundo minuto?

4.- Se estima que dentro de t años el valor de cierta parcela se incrementará a una razón de r(t) dólares por año. Halle una expresión para la cantidad en que aumentará el valor de la tierra durante los próximos 5 años.

5.- Los promotores de una feria de distrito estiman que t horas después de abrir las puertas a las 9:00 a. m., los visitantes entrarán a la feria a una razón de r(t) personas por hora. Halle una expresión para determinar el número de personas que entrará a la feria entre las 11:00 a. m. y la 1:00 p. m.

6.- Un fabricante de bicicletas espera que dentro de x meses los consumidores compren 5.000 bicicletas por mes a un precio de $P(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ dólares por bicicleta. ¿Cuál es el ingreso total que el fabricante puede esperar de la venta de las bicicletas en los próximos 16 meses?

7.- Un fabricante de bicicletas espera que dentro de x meses los consumidores compren $f(x) = 5.000 + 60\sqrt{x}$ bicicletas por mes a un precio de $F(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ dólares por bicicleta. ¿Cuál es el ingreso total que el fabricante puede esperar de la venta de las bicicletas en los próximos 16 meses?

8.- Un minorista recibe un cargamento de 12.000 lbs de semillas de soya que se consumirán a una razón constante de 300 libras por semana. Si el costo de almacenamiento de las semillas de soya es 0.2 centavos por libra a la semana, ¿cuánto tendrá que pagar el minorista en costos de almacenamiento en las próximas 40 semanas?

9.- Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a una razón de $0.6\ t^{2} + 0.2\ t + 0.5$ miles de personas por año. Los especialistas en medio ambiente han encontrado que el nivel de contaminación en el lago aumenta a una razón aproximada de 5 unidades por cada 1.000 personas. ¿En cuánto se incrementará la contaminación en el lago durante los próximos 2 años?

10.- Un estudio ambiental realizado en cierta comunidad revela que dentro de t años el nivel de monóxido de carbono en el aire cambiará a una razón anual de $0,1t + 0.1$ partes por millón. Si el nivel actual de monóxido de carbono en el aire es 3.4 partes por millón, ¿cuál será el nivel dentro de 3 años?

11.- Un fabricante ha encontrado que el costo marginal es $6q + 1$ dólares por unidad cuando se han producido q unidades. El costo total (incluidos los costos indirectos) de producción de la primera unidad es US$130. ¿Cuál es el costo total de producción de las 10 primeras unidades?

12.- Un fabricante estima que el ingreso marginal es $l00\ q^{-1/2}$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. Se ha establecido que el costo marginal correspondiente es O.4 q dólares por unidad. Suponga que la utilidad del fabricante es US$ 520 cuando el nivel de producción son 16 unidades. ¿Cuál es la utilidad del fabricante cuando el nivel de producción son 25 unidades?

13.- La utilidad marginal (la derivada de la utilidad) de cierta compañía es $100 - 2q$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. Si la utilidad de la compañía es US$ 700 cuando se producen 10 unidades, ¿cuál es la máxima utilidad posible de la compañía?

14.- Halle la función cuya tangente tiene una pendiente $4x + 1$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (1, 2).

15.- Halle la función cuya tangente tiene una pendiente $3x^2 + 6x - 2$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (0 , 6).

16.- Halle la función cuya tangente tiene una pendiente $x^3 - \frac{2}{x^2} + 2$ para cada valor dé x y cuya gráfica pasa por el punto (1, 3).

17.- Halle una función cuya gráfica tiene un mínimo relativo cuando $x = 1$ y un máximo relativo cuando $x = 4$.

18.- Un fabricante recibe N unidades de cierta materia prima que en principio se almacena y luego se retira y se utiliza a una razón constante, hasta que la reserva se agota 1 año más tarde. Suponga que los costos de almacenamiento permanecen fijos en p dólares anuales por unidad.

a) Halle una expresión para el costo total de almacenamiento que pagará el fabricante durante el año.

b) Demuestre que el costo total de almacenamiento hallado en (a) es el mismo que el de almacenar $\frac{N}{2}$ unidades durante el año.

19.- Un fabricante espera que dentro de x meses los consumidores compren n(x) lámparas por mes a un precio de p(x) dólares por lámpara. Halle una expresión para determinar el ingreso total que el fabricante puede esperar de la venta de las lámparas en los próximos 12 meses.

20.- Suponga que dentro de t meses un pozo petrolífero producirá crudo a una razón de r(t) barriles por mes y que el precio será p(t) dólares por barril. Suponiendo que el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, halle una expresión para el ingreso total obtenido del pozo petrolífero en los próximos 2 años.

21.- Después de aplicar los frenos, cierto automóvil disminuye la velocidad a una razón constante de 25 pies por segundo por segundo. Si en el momento de aplicar los frenos el automóvil viaja a 60 millas por hora, ¿cuánto recorre el automóvil antes de detenerse por completo? (Nota: 60 mph es lo mismo que 88 pies por segundo).

22.- Suponga que cierto automóvil mantiene una desaceleración constante de A pies por segundo por segundo. Si el automóvil viaja a 60 millas por hora (88 pies por segundo) cuando se aplican los frenos, recorre 180 pies antes de detenerse.

a) ¿Cuál es valor de A?
b) ¿Qué distancia habría recorrido el automóvil antes de detenerse, si viajaba a 30 millas por hora cuando se aplicaron los frenos?
c) ¿A qué velocidad viaja el automóvil cuando se aplican los frenos, si recorre 200 pies antes de detenerse?

23.- Un espía conduce un automóvil deportivo a 60 millas por hora (88 pies por segundo). De repente ve un animal en la carretera, a 199 pies delante de él. Si tiene un tiempo de reacción de 0.7 segundos antes de aplicar los frenos y el automóvil disminuye su velocidad a una razón constante de 28 pies por segundo por segundo, ¿alcanzará a detenerse antes de atropellar el animal?

24.- Encontrar la función cuya tangente tiene una pendiente $(x + 1)e^{-x}$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (1, 5)

25.- Encontrar la función cuya tangente tiene una pendiente $x \ln \sqrt{x}$ para cada valor de $x > 0$ y cuya gráfica pasa por el punto (1, 5)

Prof, H. Cornejo O.

26.- Después de t segundos, un objeto se mueve a una velocidad de $t\ e^{-1/2}$ metros por segundo. Exprese la distancia que recorre el objeto como una función del tiempo.

27.- Después de t horas en el trabajo, un obrero de una fábrica puede producir $100\ t\ e^{-0,5\ t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades producirá el trabajador durante las primeras 3 horas?

28.- Después de t semanas, las contribuciones en respuesta a una campaña local de recaudación de fondos llegaban a una razón de $2{,}000te^{-0.2\ t}$ dólares por semana. ¿Cuánto dinero se recaudó durante las 5 primeras semanas?

29.- Un fabricante ha descubierto que el costo marginal es $0.5(q + 1)e^{0.3\ q}$ dólares por unidad cuando se han producido q unidades. El costo total de producción de 100 unidades es US$ 200. ¿Cuál es el costo total de producción de las 20 primeras unidades?

30.- Se proyecta que dentro de t años la población de cierta ciudad cambiará a una razón de $t\ \ln\sqrt{t+1}$ miles de personas por año. Si la población actual es 2 millones, ¿cuál será la población dentro de 5 años?

31.- Encontrar la función cuya tangente tiene una pendiente $x(x^2 + 1)^3$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (1, 5).

32.- Se estima que dentro de x semanas el número de viajeros abonados que utilizan una nueva línea del metro crecerá a razón de $18\ x^2 + 500$ por semana. En la actualidad, 8.000 abonados utilizan el metro. ¿Cuántos abonados lo utilizarán dentro de 5 semanas?

33.- Las estadísticas reunidas por el departamento correccional local indican que dentro de x años el número de reclusos en las prisiones de la ciudad aumentará a una razón de $280e^{0.2\ x}$ por año. En la actualidad hay 2.000 reclusos en las prisiones de la ciudad. ¿Cuántos reclusos tendrá la ciudad dentro de 10 años?

34. - Un fabricante calcula que el ingreso marginal será $200q^{-½}$ dólares por unidad cuando el nivel de producción sea q unidades. Se ha encontrado que el costo marginal correspondiente es 0.4q dólares por unidad. Si la utilidad del fabricante es US$ 2.000 cuando el nivel de producción es 25 unidades, ¿cuál es la utilidad cuando el nivel de producción es 36 unidades?

35. - En cierta región del país el precio de los huevos grandes es US$ 1,60 por docena. Los estudios revelan que dentro de x semanas el precio cambiará a la razón de $0{,}2 + 0{,}003\ x^2$ centavos por semana. ¿Cuánto costará la docena de huevos dentro de 10 semanas? -

Prof, H. Cornejo O.

36.- El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece a una razón que varía con el tiempo. Cuando la maquinaria tenga t años, la razón a la que cambia su valor es 220(t - 10) dólares por año. Si la maquinaria se compró nueva por US$ 12.000, ¿cuánto valdrá después de 10 años?

37.- Un árbol ha sido trasplantado y después de x años crece a la razón de $f(x) = 0{,}5 + \frac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. ¿Cuánto habrá crecido el árbol durante el segundo año?

38.- Se calcula que dentro de t días la cosecha de un agricultor crecerá a la razón de $0.3\,t^2 + 0.6\,t + 1$ kgs por día. ¿En cuánto aumentará el valor de la cosecha durante los próximos 5 días, si el precio de mercado permanece fijo en US$ 3 por kg.?