11.1 Ejercicios

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
   (b) ¿Qué quiere decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
   (c) ¿Qué quiere decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Dé dos ejemplos.
   (b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3–8 □ Haga la lista de los cinco primeros términos.

3. $a_n = 1 - (0.2)^n$

4. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

7. $\left\{\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right\}$

8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$

9–14 □ Halle una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que el patrón de los primeros términos continúa.

9. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

10. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

12. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

14. $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots\}$

15–38 □ Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, establezca el límite.

15. $a_n = n(n-1)$

16. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

17. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

18. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

19. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

20. $a_n = \dfrac{n}{1 + \sqrt{n}}$

21. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

22. $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$

23. $a_n = 2 + \cos n\pi$

24. $\{\arctan 2n\}$

25. $\left\{\dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}\right\}$

26. $\left\{\dfrac{n!}{(n+2)!}\right\}$

27. $\left\{\dfrac{\ln(n^2)}{n}\right\}$

28. $\{(-1)^n \operatorname{sen}(1/n)\}$

29. $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\}$

30. $\left\{\dfrac{\ln(2 + e^n)}{3n}\right\}$

31. $a_n = n2^{-n}$

32. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

33. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

34. $a_n = (1 + 3n)^{1/n}$

35. $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$

36. $a_n = \dfrac{n \cos n}{n^2 + 1}$

37. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

38. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

39–46 □ Utilice una gráfica de la sucesión para decidir si converge o diverge. Si es convergente, determine el valor del límite a partir de la gráfica y después pruebe su conjetura. (Vea la nota al margen de la página 698 para saber cómo graficar las sucesiones.)

39. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

40. $a_n = 2 + (-2/\pi)^n$

41. $\left\{\arctan\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right\}$

42. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}\right\}$

43. $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$

44. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

45. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

46. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

47. Si se invierten \$1000 a un interés de 6% anual compuesto entonces a los n años, la inversión tiene valor $a_n = 1000(1.06)^n$.
    (a) Halle los 5 primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$.
    (b) ¿Es convergente o es divergente la sucesión? Explique.

48. Halle los 40 primeros términos de la sucesión

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & \text{si } a_n \text{ es un entero par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Haga una conjetura sobre este tipo de sucesión.

49. ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{nr^n\}$?

50. (a) Si $\{a_n\}$ es convergente, muestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

   (b) Se define $\{a_n\}$ una sucesión mediante $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, halle su límite.

51. Suponiendo que sabe que $\{a_n\}$ es decreciente y todos sus términos caen dentro del intervalo de 5 y 8. Explique por qué tiene límite la sucesión. ¿Qué se puede decir del valor del límite?

52–58 □ Determine si la sucesión es creciente, decreciente o no monótona. ¿Es acotada?

52. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

53. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

54. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

55. $a_n = \cos(n\pi/2)$

56. $a_n = 3 + (-1)^n/n$

57. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

58. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 2}$

59. Halle el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\right\}$$

60. Una sucesión $\{a_n\}$ está definida por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Por inducción, o por algún otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que está acotada arriba por 3. Deduzca que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe por el teorema 10.

(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

61. Muestre que la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - 1/a_n$ es creciente y $a_n < 3$ para todo n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y halle su límite.

62. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisface $0 < a_n \leqslant 2$ que es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y determine su límite.

63. (a) Fibonacci propuso este problema: suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas tendremos el enésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci definida en el ejemplo 2(c).

(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$, demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponga que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

64. (a) Sean $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \dots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre el inciso a) tomando a $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y calcule el valor de L aproximándolo a cinco decimales.

65. (a) Use una gráfica para estimar el límite de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use una gráfica de la sucesión de la parte (a) para hallar los más pequeños valores de N correspondientes a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 1.

66. Use la definición 1 directamente para probar que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ cuando $|r| < 1$.

67. Demuestre el teorema 5.
[*Sugerencia:* use ya sea la definición 1 o el teorema del emparedado.]

68. Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Muestre que si $0 \leqslant a < b$, entonces

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

(c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ en el inciso (b) para mostrar que $\{a_n\}$ es creciente.

(d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.

(e) Use los incisos (c) y (d) para mostrar que $a_n < 4$ para toda n.

(f) Use el teorema 10 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (El límite es e. Véase la ecuación 6, sección 3.8.)

69. Sean a y b números positivos, con $a > b$. Sean a_1 su media aritmética y b_1 su media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita este proceso para que, en general,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Mediante inducción matemática, demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduzca que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes.

(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites la **media aritmético-geométrica** de los números a y b.

70. (a) Muestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

halle los ocho primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego, use el inciso (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto produce el **desarrollo en fracción continua.**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$