INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Cuando se presentan expresiones del tipo $\int \frac{g(x)dx}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)}$, el racional $\frac{g(x)}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)}$ se puede descomponer en fracciones parciales de la forma

$$\frac{g(x)}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)} = \frac{A}{(ax+b)^n} + \frac{B}{(ax+b)^{n-1}} + \ldots.. + \frac{Ex+F}{(cx^2+dx+e)}$$

de manera que la integral original se transforma en:

$$\int \frac{g(x)\,dx}{(ax+b)^n(cx^2+dx+e)} = \int \frac{A\ dx}{(ax+b)^n} + \int \frac{B\ dx}{(ax+b)^{n-1}} + \ldots.. + \int \frac{(Ex+F)\,dx}{(cx^2+dx+e)}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$$

Utilizando fracciones parciales, la expresión $\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1/4}{(x-2)} - \frac{1/4}{(x+2)}$

De manera que la integral original se transforma en:

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-2)} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+2)} = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Ejercicios:

Resolver las integrales:

1.- $\int \frac{dx}{x^2-9}$ R: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

2.- $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$ R: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

3.- $\int \frac{(x+1)dx}{(x^3+x^2-6x)}$ R: $\ln \frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6}|x+3|^{2/15}} + C$

4.- $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$ R: $x+\ln\left|(x+2)(x-4)^4\right| + C$

5.- $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$ R: $\ln\left|\frac{x^{1/2}(x+2)^{3/2}}{x-1}\right|+C$

6.- $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$ R: $\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$

7.- $\int \frac{dx}{(x^3+x)}$ R: $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$

8.- $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx$ R: $\frac{1}{2}x^2+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right|+C$

9.- $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2}$ R: $\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+C$

10.- $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4}$ R: $\frac{1}{5}\ln\left|(x+1)(x-4)^4\right|+C$