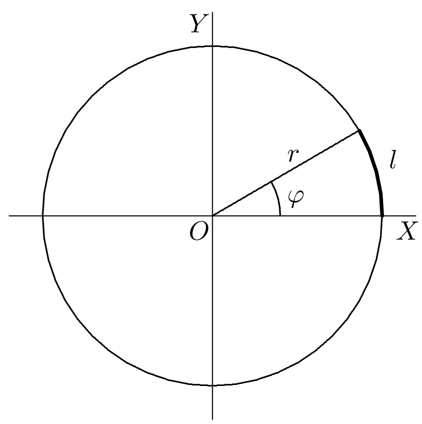
TRIGONOMETRÍA

1. Ángulos

Hasta ahora se han considerado los ángulos como la porción del plano comprendida entre dos semirrectas con el origen común. De esta manera, el ángulo está comprendido entre 0 y 360 grados. En este capítulo, un ángulo va a ser también la medida de un giro. Así, los ángulos podrán ser mayores de una vuelta (360º) y podrán tener dos sentidos: contrario al movimiento del reloj al que asignaremos signo positivo, o según el movimiento del reloj al que asignaremos ángulos negativos.



Representaremos los ángulos sobre una circunferencia centrada en el origen de coordenadas tomando como origen de ángulos el eje OX. El ángulo en radianes es igual a la longitud del arco partido por el radio:

$$\varphi = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{radio}} = \frac{l}{r}$$

Como el arco de circunferencia correspondiente a una vuelta mide $2\pi r$, el ángulo correspondiente (360º) mide $2\pi r/r = 2\pi$ radianes. El ángulo llano (180º) mide π radianes y el ángulo recto $\pi/2$. Para pasar de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$ y para pasar de radianes a grados por el inverso de este número $180/\pi$. Un radián es aproximadamente 57,2958º.

Algunos cálculos se simplifican utilizando el radián como medida de ángulos. Por ejemplo la longitud de un arco de circunferencia es $l = r\varphi$ y el área de un sector circular es $S = \frac{1}{2}r^2\varphi$.

Ángulos inscritos en una circunferencia. Se llaman así los ángulos que tienen su vértice sobre una circunferencia y sus lados son secantes de ella. Los ángulos inscritos tienen las siguientes propiedades:

- El ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.
- Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.
- Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

2. Razones trigonométricas de ángulos agudos

En un triángulo rectángulo, llamemos a a la hipotenusa y b y c a los catetos; A será el ángulo recto y B y C los ángulos agudos tal como se representa en la figura: B es el ángulo opuesto al cateto b y C es el ángulo opuesto al cateto c.

Entre los elementos del triángulo se cumple una relación entre los lados, el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

y una relación entre los ángulos:

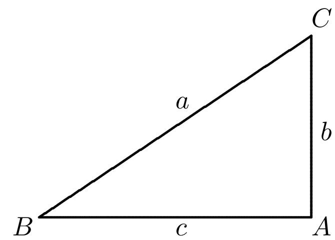
$$B + C = 90^\circ \qquad (B \text{ y } C \text{ complementarios})$$

Vamos a definir unas funciones que relacionan los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Estas funciones son las siguientes:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$



Para el ángulo C, estas funciones serían:

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

Las recíprocas de estas funciones se llaman cosecante, secante y cotangente:

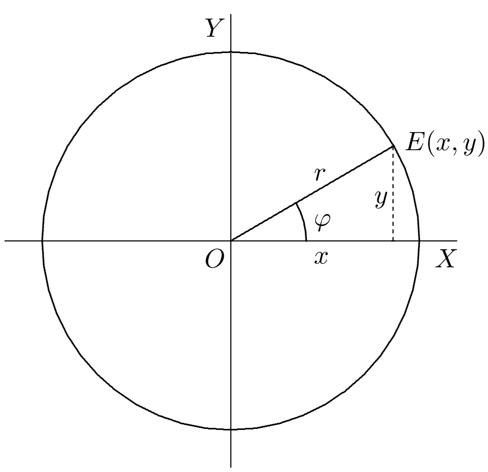
$$\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\operatorname{sen} B} \qquad \sec B = \frac{1}{\cos B} \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

Cuando se utilizan para resolver triángulos rectángulos, las fórmulas anteriores pueden recordarse de esta manera:

$$\text{un cateto} \;=\; \text{hipotenusa} \;\times \begin{cases} \text{seno del ángulo opuesto} \\ \text{coseno del ángulo comprendido} \end{cases}$$

$$\text{un cateto} \;=\; \text{otro cateto} \;\times \begin{cases} \text{tangente del ángulo opuesto (al 1º)} \\ \text{cotangente del ángulo comprendido (por el 1º)} \end{cases}$$

3. Ángulos cualesquiera



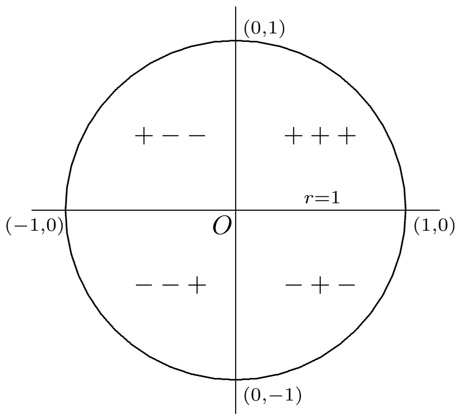
Para ángulos cualesquiera, las razones trigonométricas se definen a partir de las coordenadas del extremo del arco $E(x, y)$:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\text{ordenada de } E}{\text{radio}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{abscisa de } E}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\text{ordenada de } E}{\text{abscisa de } E} = \frac{y}{x}$$

Si el radio de la circunferencia es igual a 1, el seno es la ordenada y el coseno la abscisa del extremo del arco.



Puesto que el seno, coseno y tangente se han definido a partir de las coordenadas de un punto, pueden ser positivos o negativos dependiendo del cuadrante en que se encuentre el punto. En la figura de la izquierda se han representado los signos de las tres funciones en cada cuadrante.

Los puntos de corte de la circunferencia con los ejes de coordenadas se corresponden con los ángulos de 0º (o 360º), 90º, 180º y 270º. La abscisa y la ordenada de estos puntos cuando la circunferencia tiene radio 1 son, respectivamente el coseno y el seno de esos ángulos. Estos valores se han señalado también en la figura.

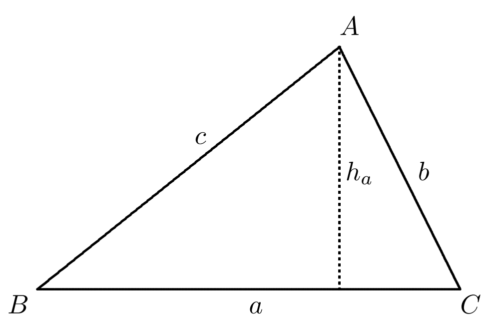
Conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo, pueden calcularse las demás (salvo el signo) por medio de las siguientes relaciones:

$$\text{i)}\quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \qquad \text{ii)}\quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{iii)}\quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{iv)}\quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

La primera de las fórmulas relaciona las tres funciones de modo que conocidas dos de ellas puede calcularse la tercera. Las siguientes relacionan seno con coseno, coseno con tangente y seno con tangente.

4. Resolución de triángulos



Un triángulo tiene tres lados a, b y c, y tres ángulos A, B y C. Conocidos tres de estos elementos que no sean los ángulos, pueden calcularse los otros tres. Para ello son útiles los siguientes teoremas:

- Teorema del seno. En un triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

El teorema del seno se demuestra fácilmente a partir de la siguiente propiedad: el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la longitud de su cuerda dividida por el diámetro.

- Teorema del coseno. Un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

El teorema del coseno permite calcular también los ángulos cuando se conocen los lados:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Área de un triángulo. El área de un triángulo es igual a la mitad de la base por la altura. Como base se puede tomar cualquiera de los lados de forma que:

$$S = \frac{1}{2}\ a\ h_a$$

Como $h_a = b \operatorname{sen} C$ resulta:

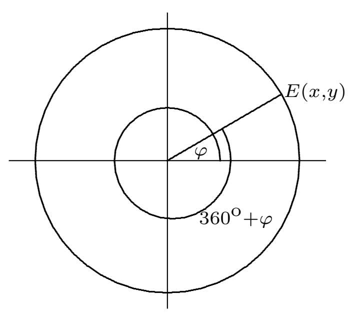
$$S = \frac{1}{2}\ a\ b\ \operatorname{sen} C$$

es decir, el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.
Si se conocen los tres lados, puede calcularse el área por la fórmula de Herón:

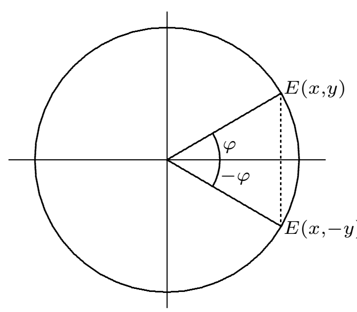
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p = \text{semiperímetro}$$

5. Reducción al primer cuadrante

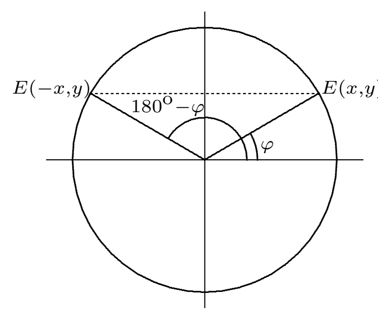
Por la simetría de la circunferencia, basta conocer las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante para poder calcular las de todos los ángulos. Las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de cualquier ángulo con los del primer cuadrante son las siguientes:



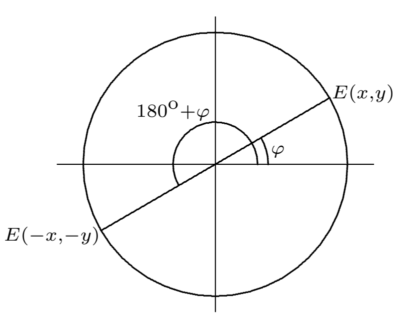
$\operatorname{sen}(360^o k + \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$
$\cos(360^o k + \varphi) = \cos\varphi$
$\operatorname{tg}(360^o k + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$



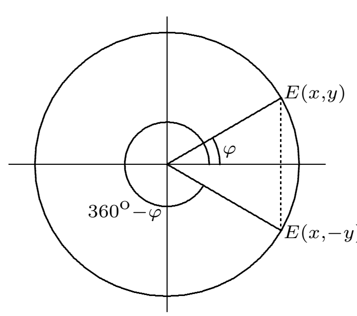
$\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$
$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$
$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$



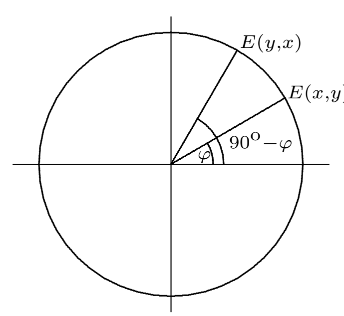
$\operatorname{sen}(180^o - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$
$\cos(180^o - \varphi) = -\cos\varphi$
$\operatorname{tg}(180^o - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$



$\operatorname{sen}(180^o + \varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$
$\cos(180^o + \varphi) = -\cos\varphi$
$\operatorname{tg}(180^o + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$



$\operatorname{sen}(360^o - \varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$
$\cos(360^o - \varphi) = \cos\varphi$
$\operatorname{tg}(360^o - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$



$\operatorname{sen}(90^o - \varphi) = \cos\varphi$
$\cos(90^o - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$
$\operatorname{tg}(90^o - \varphi) = \operatorname{cotg}\varphi$

6. Suma y diferencia de ángulos

- Las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos α y β se relacionan con las razones trigonométricas de los sumandos por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}
\end{aligned}$$

- Si en las fórmulas anteriores se cambia β por $-\beta$ y se aplican las fórmulas vistas en el apartado anterior, resulta para la diferencia de ángulos:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}
\end{aligned}$$

- Si en las fórmulas de la suma se hace $\beta = \alpha$ resulta par el ángulo doble:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\
&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\\
&\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}
\end{aligned}$$

- Puesto que $\cos^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{A}{2} = 1$ y $\cos^2\frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{A}{2} = \cos A$ despejando el seno y coseno del ángulo mitad resulta:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1-\cos A}}$$

  Las raíces deberán tomarse con signo más o menos dependiendo del cuadrante en que se encuentre el ángulo mitad.

- Sumando y restando las fórmulas de la suma y de la diferencia de ángulos se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\\
&\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

  llamando $\alpha+\beta = A$ y $\alpha-\beta = B$, estas fórmulas se pueden escribir:

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$