# PROBLEMAS RESUELTOS

**Resolver las ecuaciones trigonométricas 1-22 para todos los valores de $x$ tales que $0 \leqq x < 2\pi$. (Si se buscan todas las soluciones, añádase $+2n\pi$, a cada resultado obtenido, donde $n$ es cualquier entero positivo, negativo o cero.) En algunos problemas se han omitido los detalles de la comprobación.**

1. $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

   Aquí, $\operatorname{sen} x = 1/2$ y $x = \pi/6,\ 5\pi/6$.

2. $\operatorname{sen} x \cos x = 0$.

   De $\operatorname{sen} x = 0$, $x = 0, \pi$; de $\cos x = 0$, $x = \pi/2, 3\pi/2$.
   Las soluciones buscadas son $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

3. $(\tan x - 1)(4 \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$.

   De $\tan x - 1 = 0$, $\tan x = 1$ y $x = \pi/4, 5\pi/4$; de $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$, $\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{3}/2$ y $x = \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$.
   Las soluciones buscadas son $x = \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/4, 4\pi/3, 5\pi/3$.

4. $\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2 = 0$.

Se descompone en factores: $(\text{sen}\, x + 2)(\text{sen}\, x - 1) = 0$.

De $\text{sen}\, x + 2 = 0$, $\text{sen}\, x = -2$ y no existe solución; de $\text{sen}\, x - 1 = 0$, $\text{sen}\, x = 1$ y $x = \pi/2$. La solución buscada es $x = \pi/2$.

5. $3\cos^2 x = \text{sen}^2 x$.

*Primera solución.* Al sustituir $\text{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, se obtiene $3\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$ ó $4\cos^2 x = 1$. Entonces $\cos x = \pm 1/2$ y las soluciones buscadas son $x = \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$.

*Segunda solución.* Al dividir la ecuación por $\cos^2 x$, se obtiene $3 = \tan^2 x$. Entonces $\tan x = \pm\sqrt{3}$ y se llega a las mismas soluciones obtenidas anteriormente.

6. $2\,\text{sen}\, x - \csc x = 1$.

Se multiplica la ecuación por $\text{sen}\, x$, $2\,\text{sen}^2 x - 1 = \text{sen}\, x$, y se reordenan los términos para obtener

$$2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 1 = (2\,\text{sen}\, x + 1)(\text{sen}\, x - 1) = 0.$$

De $2\,\text{sen}\, x + 1 = 0$, $\text{sen}\, x = -1/2$ y $x = 7\pi/6, 11\pi/6$; de $\text{sen}\, x = 1$, $x = \pi/2$.

Comprobación. Para $x = \pi/2$, $2\,\text{sen}\, x - \csc x = 2(1) - 1 = 1$;
para $x = 7\pi/6$ y $11\pi/6$, $2\,\text{sen}\, x - \csc x = 2(-1/2) - (-2) = 1$.

Las soluciones son $x = \pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$.

7. $2\sec x = \tan x + \cot x$.

Se expresan las funciones en términos de senos y cosenos y se simplifican las fracciones para obtener

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \text{ ó } 2\,\text{sen}\, x = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Entonces $\text{sen}\, x = 1/2$ y $x = \pi/6, 5\pi/6$.

8. $\tan x + 3\cot x = 4$.

Se multiplica por $\tan x$ y se reordenan los términos:

$$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = (\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0.$$

De $\tan x - 1 = 0$, $\tan x = 1$ y $x = \pi/4, 5\pi/4$; de $\tan x - 3 = 0$, $\tan x = 3$ y $x = 71°34', 251°34'$

Comprobación. Para $x = \pi/4$ y $5\pi/4$, $\tan x + 3\cot x = 1 + 3(1) = 4$;
para $x = 71°34'$ y $251°34'$, $\tan x + 3\cot x = 3 + 3(1/3) = 4$.

Las soluciones son $45°, 71°34', 225°, 251°34'$.

9. $\csc x + \cot x = \sqrt{3}$.

*Primera solución.* Escríbase la ecuación en la forma $\csc x = \sqrt{3} - \cot x$ y elévese al cuadrado para obtener

$$\csc^2 x = 3 - 2\sqrt{3}\cot x + \cot^2 x.$$

Substitúyase $\csc^2 x$ por $1 + \cot^2 x$ y reagrúpense los resultados para llegar a $2\sqrt{3}\cot x - 2 = 0$. Entonces $\cot x = 1/\sqrt{3}$ y $x = \pi/3, 4\pi/3$.

Comprobación. Para $x = \pi/3$, $\csc x + \cot x = 2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}$;
para $x = 4\pi/3$, $\csc x + \cot x = -2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$. La solución buscada es $x = \pi/3$.

*Segunda solución.* Al efectuar las sustituciones indicadas, la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{\text{sen}\, x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \sqrt{3} \text{ y, al simplificar las fracciones, } 1 + \cos x = \sqrt{3}\,\text{sen}\, x.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros, se obtiene $1 + 2\cos x + \cos^2 x = 3\,\text{sen}^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$ o

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0.$$

De $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1/2$ y $x = \pi/3, 5\pi/3$; de $\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -1$ y $x = \pi$.

Ahora bien, $x = \pi/3$ es la solución, porque los valores $x = \pi$ y $5\pi/3$ han de desecharse puesto que $\csc \pi$ no está definida y $\csc 5\pi/3$ y $\cot 5\pi/3$ son ambas negativas.

10. $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 1$.

*Primera solución.* Si se expresa la ecuación en la forma $\cos x - 1 = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x$ y se eleva al cuadrado, se obtiene

$$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 3\,\text{sen}^2 x = 3(1 - \cos^2 x);$$

después, se reagrupa y se descompone en factores:

$$4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

De $2\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -1/2$ y $x = 2\pi/3, 4\pi/3$; de $\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1$ y $x = 0$.

Comprobación. Para $x = 0$, $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 1 - \sqrt{3}\,(0) = 1$;

para $x = 2\pi/3$, $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = -1/2 - \sqrt{3}\,(\sqrt{3}/2) \neq 1$;

para $x = 4\pi/3$, $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = -1/2 - \sqrt{3}\,(-\sqrt{3}/2) = 1$.

Las soluciones buscadas son $x = 0, 4\pi/3$.

*Segunda solución.* Se escribe el miembro izquierdo de la ecuación en la forma

$$\text{sen}\,\theta\cos x + \cos\theta\,\text{sen}\,x = \text{sen}(\theta + x),$$

en la que $\theta$ es un ángulo conocido, y se divide la ecuación por $r > 0$, $\frac{1}{r}\cos x + \left(\frac{-\sqrt{3}}{r}\right)\text{sen}\,x = \frac{1}{r}$, donde $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{r}$ y $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{r}$. Como $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{r}\right)^2 = 1$ y $r = 2$. Puesto que $\text{sen}\,\theta = 1/2$, $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ de modo que la ecuación dada puede expresarse como $\text{sen}(\theta + x) = 1/2$ con $\theta = 5\pi/6$. Entonces $\theta + x = 5\pi/6 + x = \text{arc sen}\,1/2 = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, 17\pi/6, \cdots$ y $x = -2\pi/3, 0, 4\pi/3, 2\pi, \cdots$. Como antes, las soluciones buscadas son $x = 0, 4\pi/3$.

Obsérvese que $r$ es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de los coeficientes de $\cos x$ y $\text{sen}\,x$ cuando la ecuación se escribe en la forma $a\cos x + b\,\text{sen}\,x = c$, esto es,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La ecuación no tiene solución si $\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ es mayor que 1 o menor que $-1$.

11. $2\cos x = 1 - \text{sen}\,x$.

*Primera solución.* Como en el problema 10, se tiene

$$4\cos^2 x = 1 - 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x,$$

$$4(1 - \text{sen}^2 x) = 1 - 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x,$$

$$5\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 3 = (5\,\text{sen}\,x + 3)(\text{sen}\,x - 1) = 0.$$

De $5\,\text{sen}\,x + 3 = 0$, $\text{sen}\,x = -3/5 = -0{,}6000$ y $x = 216°52'$, $323°8'$; de $\text{sen}\,x - 1 = 0$, $\text{sen}\,x = 1$ y $x = \pi/2$.

Comprobación. Para $x = \pi/2$, $2(0) = 1 - 1$;

para $x = 216°52'$, $2(-4/5) \neq 1 - (-3/5)$;

para $x = 323°8'$, $2(4/5) = 1 - (-3/5)$.

Las soluciones buscadas son $x = 90°, 323°8'$.

*Segunda solución.* Al escribir la ecuación en la forma $2\cos x + \text{sen}\,x = 1$ y dividir por $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, se obtiene

$$1)\qquad \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\text{sen}\,x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sea $\text{sen}\,\theta = 2/\sqrt{5}$, $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$; entonces 1) se convierte en

$$\text{sen}\,\theta\cos x + \cos\theta\,\text{sen}\,x = \text{sen}(\theta + x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donde $\theta = 63°26'$. Por tanto, $\theta + x = 63°26' + x = \text{arc sen}(1/\sqrt{5}) = \text{arc sen}(0{,}4472) = 26°34'$, $153°26'$, $386°34'$, $\cdots$ y $x = 90°, 323°8'$ como anteriormente.

**Ecuaciones que contienen ángulos múltiplos.**

12. $\operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Como se buscan valores de $x$ tales que $0 \leqq x < 2\pi$, $3x$ tiene que ser tal que $0 \leqq 3x < 6\pi$. Entonces $3x = 5\pi/4,\ 7\pi/4,\ 13\pi/4,\ 15\pi/4,\ 21\pi/4,\ 23\pi/4$ y

$x = 5\pi/12,\ 7\pi/12,\ 13\pi/12,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4,\ 23\pi/12$. Cada uno de estos valores es una solución.

13. $\cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$.

Como se buscan valores de $x$ tales que $0 \leqq x < 2\pi$, $\frac{1}{2}x$ tiene que ser tal que $0 \leqq \frac{1}{2}x < \pi$. Entonces $\frac{1}{2}x = \pi/3$ y $x = 2\pi/3$.

14. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$.

Se efectúa la sustitución correspondiente a sen $2x$, y se obtiene

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos x = \cos x\,(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0.$$

De $\cos x = 0$, $x = \pi/2,\ 3\pi/2$; de $\operatorname{sen} x = -1/2$, $x = 7\pi/6,\ 11\pi/6$.

Las soluciones buscadas son $x = \pi/2,\ 7\pi/6,\ 3\pi/2,\ 11\pi/6$.

15. $2 \cos^2 \frac{1}{2}x = \cos^2 x$.

Si se escribe $1 + \cos x$ en vez de $2\cos^2\frac{1}{2}x$, la ecuación se transforma en $\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; entonces $\cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180,\ -0{,}6180$. Puesto que $\cos x$ no puede ser mayor que 1, se considera únicamente $\cos x = -0{,}6180$ con lo que se obtienen las soluciones $x = 128°10',\ 231°50'$.

Nota. Para resolver $\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x = \cos x$ y $\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x = -\cos x$, se elevan al cuadrado ambas igualdades y se obtienen las ecuaciones de este problema. La solución de la primera de estas ecuaciones es $231°50'$ y la solución de la segunda es $128°10'$.

16. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$.

Si se escribe $2\cos^2 x - 1$ en vez de $\cos 2x$, se tiene $2\cos^2 x + \cos x = \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$.

De $\cos x = 0$, $x = \pi/2,\ 3\pi/2$; de $\cos x = -1/2$, $x = 2\pi/3,\ 4\pi/3$.

Las soluciones buscadas son $x = \pi/2,\ 2\pi/3,\ 3\pi/2,\ 4\pi/3$.

17. $\tan 2x + 2 \operatorname{sen} x = 0$.

Mediante $\tan 2x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos 2x}$, se llega a

$$\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos 2x} + 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x\,\left(\frac{\cos x}{\cos 2x} + 1\right) = 2 \operatorname{sen} x\,\left(\frac{\cos x + \cos 2x}{\cos 2x}\right) = 0.$$

De $\operatorname{sen} x = 0$, $x = 0, \pi$; de $\cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$, $x = \pi/3,\ 5\pi/3$, y $\pi$. Las soluciones buscadas son $x = 0,\ \pi/3,\ \pi,\ 5\pi/3$.

18. $\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$.

*Primera solución*. Tómese $2x = \theta$; entonces, es necesario resolver $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ para $0 \leqq \theta < 4\pi$. Entonces $\theta = \pi/4,\ 5\pi/4,\ 9\pi/4,\ 13\pi/4$ y $x = \theta/2 = \pi/8,\ 5\pi/8,\ 9\pi/8,\ 13\pi/8$ son las soluciones.

*Segunda solución*. Dividida por $\cos 2x$, la ecuación se transforma en $\tan 2x = 1$ con lo que $2x = \pi/4$, $5\pi/4,\ 9\pi/4,\ 13\pi/4$, como en la primera solución.

**19. sen $2x$ = cos $4x$.**

Como cos $4x$ = cos $2(2x) = 1 - 2$ sen$^2 2x$, la ecuación puede expresarse en la forma

$$2 \text{ sen}^2 2x + \text{sen } 2x - 1 = (2 \text{ sen } 2x - 1)(\text{sen } 2x + 1) = 0.$$

De 2 sen $2x - 1 = 0$ ó sen $2x = 1/2$, $2x = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, 17\pi/6$ y $x = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$; de sen $2x + 1 = 0$ ó sen $2x = -1$, $2x = 3\pi/2, 7\pi/2$ y $x = 3\pi/4, 7\pi/4$.

Todos estos valores son soluciones.

**20. sen $3x$ = cos $2x$.**

Para evitar la sustitución de sen $3x$, se puede utilizar uno de los procedimientos siguientes:

*Primera solución.* Ya que cos $2x$ = sen$(\frac{1}{2}\pi - 2x)$ y además, cos $2x$ = sen$(\frac{1}{2}\pi + 2x)$, considérese

*a*) sen $3x$ = sen$(\frac{1}{2}\pi - 2x)$, puesto que $3x = \pi/2 - 2x, 5\pi/2 - 2x, 9\pi/2 - 2x, \cdots,$ y

*b*) sen $3x$ = sen$(\frac{1}{2}\pi + 2x)$, puesto que $3x = \pi/2 + 2x, 5\pi/2 + 2x, 9\pi/2 + 2x, \cdots.$

De *a*), $5x = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, 13\pi/2, 17\pi/2$ (puesto que $5x < 10\pi$); y de *b*), $x = \pi/2$. Las soluciones buscadas son $x = \pi/10, \pi/2, 9\pi/10, 13\pi/10, 17\pi/10$.

*Segunda solución.* Ya que sen $3x$ = cos$(\frac{1}{2}\pi - 3x)$ y cos $2x$ = cos$(-2x)$, considérese

*c*) cos $2x$ = cos$(\frac{1}{2}\pi - 3x)$, puesto que $5x = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, 13\pi/2, 17\pi/2,$ y

*d*) cos$(-2x)$ = cos$(\frac{1}{2}\pi - 3x)$, puesto que $x = \pi/2$, como antes.

**21. tan $4x$ = cot $6x$.**

Como cot $6x$ = tan$(\frac{1}{2}\pi - 6x)$, considérese la ecuación tan $4x$ = tan$(\frac{1}{2}\pi - 6x)$.

Entonces, $4x = \pi/2 - 6x, 3\pi/2 - 6x, 5\pi/2 - 6x, \cdots$, porque el período de la función tan $\theta$ es $\pi$.

Así, $10x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2, 9\pi/2, \cdots, 39\pi/2$ y las soluciones buscadas son

$$x = \pi/20, 3\pi/20, \pi/4, 7\pi/20, \cdots, 39\pi/20.$$

**22. sen $5x$ − sen $3x$ − sen $x$ = 0.**

Se sustituye sen $5x$ − sen $3x$ por 2 cos $4x$ sen $x$ (capítulo 12), para transformar la ecuación dada en

$$2 \cos 4x \text{ sen } x - \text{sen } x = \text{sen } x\,(2 \cos 4x - 1) = 0.$$

De sen $x = 0$, $x = 0, \pi$; de 2 cos $4x - 1 = 0$ ó cos $4x = 1/2$, $4x = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3, 13\pi/3, 17\pi/3, 19\pi/3, 23\pi/3$ y $x = \pi/12, 5\pi/12, 7\pi/12, 11\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$. Cada uno de los valores obtenidos es una solución.

**23. Resolver el sistema** $\begin{array}{l}(1)\ r \text{ sen } \theta = 2 \\ (2)\ r \cos \theta = 3\end{array}$ para $r > 0$ y $0 \leqq \theta < 2\pi$.

Se eleva al cuadrado cada ecuación y, después, se suman las ecuaciones resultantes, con lo que

$$r^2 \text{ sen } \theta + r^2 \cos \theta = r^2 = 13 \quad \text{y} \quad r = \sqrt{13} = 3{,}606.$$

Cuando $r > 0$, sen $\theta$ y cos $\theta$ son ambos $> 0$ y $\theta$ es agudo.

Si se divide (1) por (2), tan $\theta = 2/3 = 0{,}6667$ y $\theta = 33°41'$.

**24. Resolver el sistema** $\begin{array}{l}(1)\ r \text{ sen } \theta = 3 \\ (2)\ r = 4(1 + \text{sen } \theta)\end{array}$ para $r > 0$ y $0 \leqq \theta < 2\pi$.

Si se divide (2) por (1), $\dfrac{1}{\text{sen } \theta} = \dfrac{4(1 + \text{sen } \theta)}{3}$ ó $4 \text{ sen}^2\theta + 4 \text{ sen } \theta - 3 = 0$ y

$$(2 \text{ sen } \theta + 3)(2 \text{ sen } \theta - 1) = 0.$$

De 2 sen $\theta - 1 = 0$, sen $\theta = 1/2$, $\theta = \pi/6$ y $5\pi/6$; según (1), $r(1/2) = 3$ y $r = 6$. Obsérvese que no se considera 2 sen $\theta + 3 = 0$ porque, cuando $r > 0$, sen $\theta > 0$ por (1).

Las soluciones buscadas son $\theta = \pi/6$, $r = 6$ y $\theta = 5\pi/6$, $r = 6$.

25. Resolver el sistema $\begin{matrix}(1) & \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1{,}2 \\ (2) & \cos x + \cos y = 1{,}5\end{matrix}$ para $0 \leqq x,\ y < 2\pi$.

Como cada una de las sumas que aparecen en el miembro izquierdo de cada ecuación es mayor que 1, todas las funciones son positivas y tanto $x$ como $y$ son agudos.

Aplicadas las fórmulas convenientes del capítulo 12, se obtiene

$$\begin{aligned}(1') \quad & 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y) = 1{,}2 \\ (2') \quad & 2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y) = 1{,}5.\end{aligned}$$

Si se divide (1′) por (2′), $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)} = \tan \frac{1}{2}(x+y) = \dfrac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8000$ y $\frac{1}{2}(x+y) = 38°40'$ porque $\frac{1}{2}(x+y)$ es también agudo.

La sustitución de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y) = 0{,}6248$ en (1′), lleva a $\cos \frac{1}{2}(x-y) = \dfrac{0{,}6}{0{,}6248} = 0{,}9603$ y $\frac{1}{2}(x-y) = 16°12'$.

Entonces $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = 54°52'$ y $y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = 22°28'$.

26. Resolver Arc cos $2x$ = Arc sen $x$.

Si $x$ es positivo, $\alpha$ = Arc cos $2x$ y $\beta$ = Arc sen $x$ pertenecen al cuadrante I; si $x$ es negativo, $\alpha$ pertenece al cuadrante II y $\beta$ pertenece al cuadrante IV. Así, $x$ ha de ser positivo.

Para $x$ positivo, $\operatorname{sen} \beta = x$ y $\cos \beta = \sqrt{1-x^2}$. Si ahora se expresan los cosenos de ambos miembros de la ecuación dada, se obtiene

$$\cos(\text{Arc} \cos 2x) = \cos(\text{Arc} \operatorname{sen} x) = \cos \beta \quad \text{ó} \quad 2x = \sqrt{1-x^2}.$$

Al elevar al cuadrado, $4x^2 = 1 - x^2$, $5x^2 = 1$ y $x = \sqrt{5}/5 = 0{,}4472$.

Comprobación. Arc cos $2x$ = Arc cos 0,8944 = 26°30′ = Arc sen 0,4472, donde el arco está expresado con una aproximación de 10′.

27. Resolver Arc cos$(2x^2 - 1)$ = 2 Arc cos $\frac{1}{2}$.

Sea $\alpha$ = Arc cos$(2x^2-1)$ y $\beta$ = Arc cos $\frac{1}{2}$; entonces $\cos \alpha = 2x^2 - 1$ y $\cos \beta = \frac{1}{2}$.

Si se escriben los cosenos de ambos miembros de la ecuación dada, se obtiene

$$\cos \alpha = 2x^2 - 1 = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2(\tfrac{1}{2})^2 - 1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Entonces $2x^2 = \frac{1}{2}$ y $x = \pm \frac{1}{2}$.

Comprobación. Para $x = \pm \frac{1}{2}$, Arc cos$(-\frac{1}{2})$ = 2 Arc cos $\frac{1}{2}$ ó $120° = 2(60°)$.

28. Resolver Arc cos $2x$ − Arc cos $x$ = $\pi/3$.

Si $x$ es positivo, $0 <$ Arc cos $2x <$ Arc cos $x$; si $x$ es negativo, Arc cos $2x >$ Arc cos $x > 0$. Entonces, $x$ ha de ser negativo.

Tómese $\alpha$ = Arc cos $2x$ y $\beta$ = Arc cos $x$; entonces $\cos \alpha = 2x$, $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1-4x^2}$, $\cos \beta = x$ y $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1-x^2}$ porque tanto $\alpha$ como $\beta$ pertenecen al cuadrante II.

Si se expresan los cosenos de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = 2^2 + \sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} = \cos \pi/3 = \tfrac{1}{2}$$

o

$$\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2} - 2x^2.$$

Al elevar al cuadrado $1 - 5x^2 + 4x^4 = \frac{1}{4} - 2x^2 + 4x^4$, $3x^2 = \frac{3}{4}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Comprobación. Arc cos$(-1)$ − Arc cos$(-\frac{1}{2}) = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$.

29. Resolver Arc sen $2x = \frac{1}{4}\pi -$ Arc sen $x$.

Tómese $\alpha =$ Arc sen $2x$ y $\beta =$ arc sen $x$; entonces sen $\alpha = 2x$ y sen $\beta = x$. Si $x$ es negativo, $\alpha$ y $\beta$ pertenecen al cuadrante IV. Así, $x$ ha de ser positivo y $\beta$ ha de ser agudo.

Si se escriben los senos de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\tfrac{1}{4}\pi - \beta) = \text{sen}\,\tfrac{1}{4}\pi\cos\beta - \cos\tfrac{1}{4}\pi\,\text{sen}\,\beta$$

o
$$2x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x \quad \text{y} \quad (2\sqrt{2}+1)x = \sqrt{1-x^2}.$$

Al elevar al cuadrado, $(8 + 4\sqrt{2} + 1)x^2 = 1 - x^2$, $x^2 = 1/(10 + 4\sqrt{2})$, y $x = 0{,}2527$.

Comprobación. Arc sen $0{,}5054 = 30°22'$; Arc sen $0{,}2527 = 14°38'$ y $\frac{1}{4}\pi - 14°38' = 30°22'$.

30. Resolver Arc tan $x$ + Arc tan$(1 - x)$ = Arc tan $4/3$.

Tómese $\alpha =$ Arc tan $x$ y $\beta =$ Arc tan$(1-x)$; entonces tan $\alpha = x$ y tan $\beta = 1 - x$.

Si se expresan las tangentes de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x + (1-x)}{1 - x(1-x)} = \frac{1}{1 - x + x^2} = \tan(\text{Arc tan } 4/3) = 4/3.$$

Entonces $3 = 4 - 4x + 4x^2$, $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

Comprobación. Arc tan $\frac{1}{2}$ + Arc tan$(1 - \frac{1}{2})$ = 2 Arc tan $0{,}5000 = 53°8'$ y
Arc tan $4/3$ = Arc tan $1{,}3333 = 53°8'$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones para todos los valores de $x$ tales que $0 \leqq x < 2\pi$.

31. sen $x = \sqrt{3}/2$. *Resp.* $\pi/3$, $2\pi/3$
32. $\cos^2 x = 1/2$. *Resp.* $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$
33. sen $x\cos x = 0$. *Resp.* $0$, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$
34. $(\tan x - 1)(2\,\text{sen}\,x + 1) = 0$. *Resp.* $\pi/4$, $7\pi/6$, $5\pi/4$, $11\pi/6$
35. $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x - 1 = 0$. *Resp.* $\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$
36. sen $2x$ + sen $x = 0$. *Resp.* $0$, $2\pi/3$, $\pi$, $4\pi/3$
37. $\cos x + \cos 2x = 0$. *Resp.* $\pi/3$, $\pi$, $5\pi/3$
38. $2\tan x\,\text{sen}\,x - \tan x = 0$. *Resp.* $0$, $\pi/6$, $5\pi/6$, $\pi$
39. $2\cos x + \sec x = 3$. *Resp.* $0$, $\pi/3$, $5\pi/3$
40. $2\,\text{sen}\,x + \csc x = 3$. *Resp.* $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$
41. sen $x + 1 = \cos x$. *Resp.* $0$, $3\pi/2$
42. $\sec x - 1 = \tan x$. *Resp.* $0$
43. $2\cos x + 3\,\text{sen}\,x = 2$. *Resp.* $0°$, $112°37'$
44. $3\,\text{sen}\,x + 5\cos x + 5 = 0$. *Resp.* $180°$, $241°56'$
45. $1 + \text{sen}\,x = 2\cos x$. *Resp.* $36°52'$, $270°$
46. $3\,\text{sen}\,x + 4\cos x = 2$. *Resp.* $103°18'$, $330°27'$
47. sen $2x = -\sqrt{3}/2$. *Resp.* $2\pi/3$, $5\pi/6$, $5\pi/3$, $11\pi/6$
48. $\tan 3x = 1$. *Resp.* $\pi/12$, $5\pi/12$, $3\pi/4$, $13\pi/12$, $17\pi/12$, $7\pi/4$
49. $\cos x/2 = \sqrt{3}/2$. *Resp.* $\pi/3$
50. $\cot x/3 = -1/\sqrt{3}$. *Resp.* No existe solución en el intervalo dado

51. $\operatorname{sen} x \cos x = 1/2$. *Resp.* $\pi/4,\ 5\pi/4$

52. $\operatorname{sen} x/2 + \cos x = 1$. *Resp.* $0,\ \pi/3,\ 5\pi/3$

53. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 0$. *Resp.* $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$

54. $\cos 2x + \cos 3x = 0$. *Resp.* $\pi/5,\ 3\pi/5,\ \pi,\ 7\pi/5,\ 9\pi/5$

55. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 3x$. *Resp.* $0,\ \pi/3,\ 2\pi/3,\ \pi,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3$

56. $\cos 5x + \cos x = 2 \cos 2x$. *Resp.* $0,\ \pi/4,\ 2\pi/3,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 4\pi/3,\ 7\pi/4$

57. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \cos 3x$. *Resp.* $\pi/8,\ \pi/2,\ 5\pi/8,\ 9\pi/8,\ 3\pi/2,\ 13\pi/8$

Resolver cada uno de los siguientes sistemas para $r \geqq 0$ y $0 \leqq \theta < 2\pi$.

58. $r = a \operatorname{sen} \theta$
$r = a \cos 2\theta$
*Resp.* $\theta = \pi/6,\ r = a/2$
$\theta = 5\pi/6,\ r = a/2;\ \theta = 3\pi/2,\ r = -a$

59. $r = a \cos \theta$
$r = a \operatorname{sen} 2\theta$
*Resp.* $\theta = \theta = \pi/2,\ r = 0;\ \theta = 3\pi/2,\ r = 0$
$\theta = \pi/6,\ r = \sqrt{3}a/2$
$\theta = 5\pi/6,\ r = -\sqrt{3}a/2$

60. $r = 4(1 + \cos \theta)$
$r = 3 \sec \theta$
*Resp.* $\theta = \pi/3,\ r = 6$
$\theta = 5\pi/3,\ r = 6$

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones.

61. $\operatorname{Arc} \tan 2x + \operatorname{Arc} \tan x = \pi/4$. *Resp.* $x = 0{,}281$

62. $\operatorname{Arc} \operatorname{sen} x + \operatorname{Arc} \tan x = \pi/2$. *Resp.* $x = 0{,}786$

63. $\operatorname{Arc} \cos x + \operatorname{Arc} \tan x = \pi/2$. *Resp.* $x = 0$