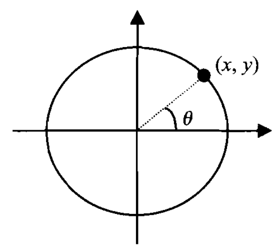
Trigonometría

Si θ es un ángulo medido en radianes y (x, y) son las coordenadas de un punto sobre un círculo unitario, como en la siguiente figura, entonces las ***funciones trigonométricas*** del ángulo θ se definen así:



$$\operatorname{sen}\theta = y \quad \cos\theta = x \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{y} \quad \sec\theta = \frac{1}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Objetivos

- 6.1 Valor de funciones trigonométricas de ángulos especiales
- 6.2 Funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90°
- 6.3 Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo rectángulo
- 6.4 Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo cualquiera
- 6.5 Identidades trigonométricas básicas
- 6.6 Ecuaciones trigonométricas

Un ***radián*** es la medida del ángulo central de un círculo que subtiene un arco de longitud igual al radio del círculo. Un **grado** (1°) es el ángulo formado por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa. $360° = 2\pi$ radianes. Para cambiar de grados a radianes se multiplica por $\frac{\pi}{180}$; para cambiar de radianes a grados se multiplica por $\frac{180}{\pi}$.

Valor de funciones trigonométricas de ángulos especiales

Grad θ	*Rad* θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
0	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

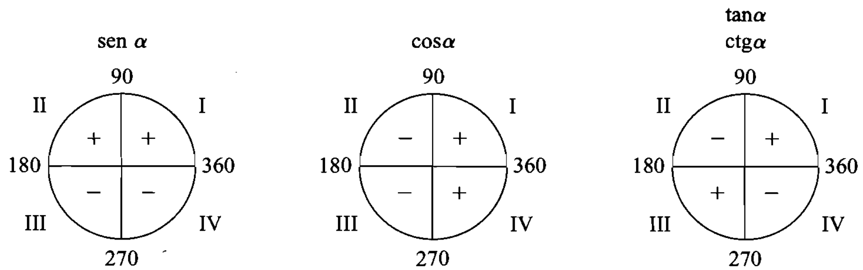
Funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90°

Si el ángulo es mayor que 90°, pero menor que 360°, entonces calculamos su seno, coseno, tangente y cotangente de la siquiente manera:

- encontramos la diferencia entre el ángulo dado y el ángulo cercano (180° o 360°) y calculamos la función correspondiente de ésta diferencia.
- el resultado lo tomamos como positivo o negativo según la tabla:

Función	**1er. cuarto (del 0° al 90°)**	**2do. cuarto (del 90° al 180°)**	**3er. cuarto (del 180° al 270°)**	**4to. cuarto (del 270° al 360°)**
seno	+	+	−	−
coseno	+	−	−	+
tangente	+	−	+	−
cotangente	+	−	+	−

Si el ángulo θ considerado es mayor que 360°, entonces lo dividimos entre 360° y consideramos el residuo α menor que 360°, tomando $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\theta = \cos\alpha$.



■ Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo rectángulo

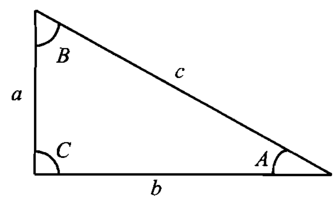
a y b son dos catetos, c la hipotenusa; A y B los ángulos y C el ángulo recto.

(1) $a = c\,\text{sen}\,A = c\cos B$

(2) $a = b\tan A = b\cot B$

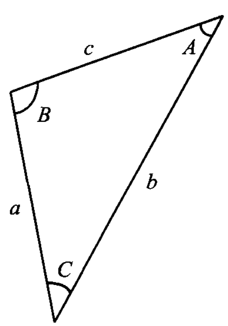
(3) $b = c\,\text{sen}\,B = c\cos A$

(4) $b = a\tan B = a\cot A$



■ Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo cualquiera

a, b y c son los lados, A, B y C los ángulos de un triángulo cualquiera.



(5) $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} = \dfrac{c}{\text{sen}C}$ **(Teorema de los senos)**

(6) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ **(Teorema del coseno)**

(7) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$ **(Teorema de las tangentes)**

■ Identidades trigonométricas básicas

Identidades recíprocas:

(8)' $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}x}$

(9) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(10) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades del cociente:

(11) $\tan x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}, x \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1), n \in \boldsymbol{Z};$

(12) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}x}, x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z};$

Identidades pitagóricas:

(13) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1;$

(14) $\sec^2x = 1 + \tan^2x, x \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1), n \in \boldsymbol{Z};$

(15) $\csc^2x = 1 + \cot^2x, x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z};$

Identidades para negativos:

(16) $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$

(17) $\cos(-x) = \cos x$

■ FÓRMULAS DE SUMA ■

(18) $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x\cos y + \cos x\,\text{sen}y$

(19) $\text{sen}(x-y) = \text{sen}x\cos y - \cos x\,\text{sen}y$

(20) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \text{sen}x\,\text{sen}y$

(21) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \text{sen}x\,\text{sen}y$

(22) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad x, y, x+y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

(23) $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}, \quad x, y, x-y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

■ FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE ■

(24) $\text{sen}2x = 2\text{sen}x\cos x$

(25) $\cos 2x = \cos^2x - \text{sen}^2x = 2\cos^2x - 1 = 1 - 2\text{sen}^2x$

(26) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}, x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, k \in Z, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

■ FÓRMULAS DEL ÁNGULO MITAD ■

(27) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

(28) $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

(29) $\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x} \qquad x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

■ FÓRMULAS DE TRANSFORMACIÓN DE SUMAS A PRODUCTOS ■

(30) $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(31) $\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

(32) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(33) $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

(34) $\tan x + \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad x,y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

(35) $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y} \qquad x,y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

■ FÓRMULAS DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS A SUMAS ■

(36) $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

(37) $\cos x\cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$

(38) $\operatorname{sen}x\cos y = \frac{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{2}$

■ RELACIONES IMPORTANTES ENTRE SEN X, COS X Y TAN $\frac{X}{2}$ ■

(39) $\operatorname{sen}x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad x \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$

(40) $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad x \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$

■ Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas sencillas son ecuaciones del tipo sen$x = a$ (donde $|a| \leq 1$), cos$x = a$ (donde $|a| \leq 1$), tan$x = a$ (donde $-\infty < a < -\infty$), cot$x = a$ (donde $-\infty < a < +\infty$).

Las soluciones de estas ecuaciones tienen la siguiente forma:

Llamemos arc senα a un ángulo x cuyo seno es α. Asimismo arc cosα será un ángulo x cuyo coseno es α, arc tanα un ángulo x cuya tangente es α y arc cotα un ángulo x cuya cotangente es α.

(41) $\operatorname{sen}x = \alpha;\ x = (-1)^n \operatorname{arc sen}\alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(42) $\cos x = \alpha;\ x = \pm\operatorname{arc cos}\alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(43) $\tan x = \alpha;\ x = \operatorname{arc tan}\alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(44) $\cot x = \alpha;\ x = \operatorname{arc cot}\alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

En los casos particulares cuando $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$ tenemos:

(45) $\operatorname{sen}x = 0;\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(46) $\operatorname{sen}x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(47) $\operatorname{sen}x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(48) $\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(49) $\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(50) $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

(51) $\tan x = 0;\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

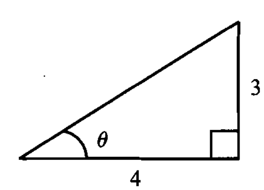
(52) $\cot x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Las ecuaciones del tipo sen$(wx + \varphi) = a$, cos $(wx + \varphi) = a$, tan$(wx + \varphi) = b$. cot $(wx + \varphi) = b$ ($|a| < 1$, $w \neq 0$, φ, b son números arbitrarios) se resuelven sustituyendo $wx + \varphi$ por x.

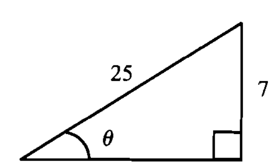
EJERCICIOS I

Halle los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ.

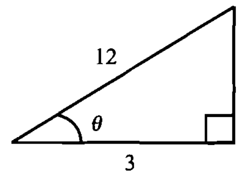
1.



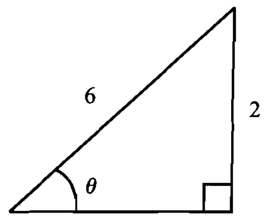
2.



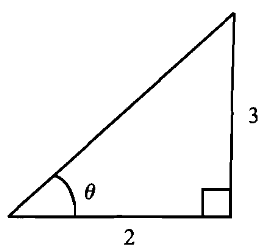
3.



4.

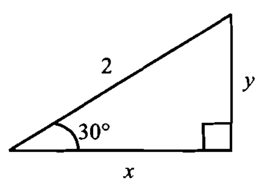


5.

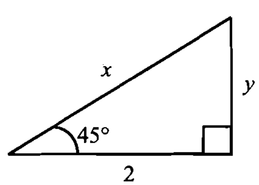


Encuentre los valores exactos de x y y

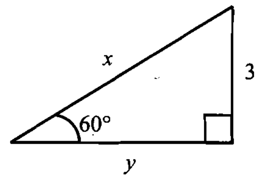
6.



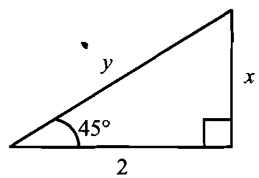
7.



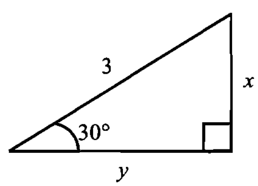
8.



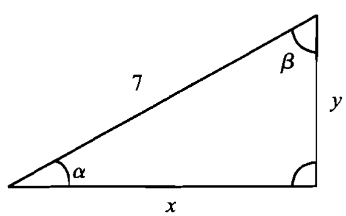
9.



10.



Utilice el siguiente triángulo para determinar el valor de cada expresión:



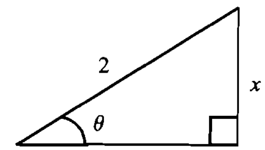
11. $\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$
12. $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta$
13. $\tan\alpha \cot\beta$
14. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$
15. $\sec\beta \dfrac{1}{\cos\beta}$

Halle los valores de las funciones trigonométricas restantes para el ángulo agudo α si

16. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{8}$
17. $\cos\alpha = \frac{7}{9}$

18. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$
19. $\sec\alpha = 3$
20. $\csc\alpha = \frac{5}{2}$

Utilice el siguiente triángulo rectángulo para mostrar que las siguientes igualdades son válidas.



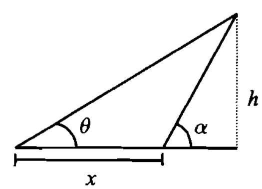
21. $\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \dfrac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$

22. $\tan^2\theta = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

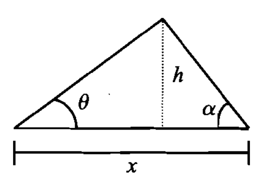
23. $\sec^2\theta = \dfrac{4}{4-x^2}$

24. $\dfrac{\cos^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{4}(4-x^2)^2$

25. Demuestre que $h = \dfrac{x}{\cot\theta - \cot\alpha}$, utilizando la siguiente figura.



26. Utilizando la siguiente figura muestre que $h = \dfrac{x}{\cot\theta - \cot\alpha}$.



27. Complete la siguiente tabla

Grados	Radianes
75°	
	$\frac{7\pi}{4}$
38°	
	$\frac{3\pi}{4}$
112°	

28. Complete la siguiente tabla

x	120°	150°	210°	240°	300°	330°
radianes	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{sen}x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
$\cos x$						
$\tan x$						
$\cot x$						

29. Complete la siguiente tabla

θ	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$
Grados		225°		
$\operatorname{sen}\theta$			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos\theta$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$\tan\theta$				

Verifique que las siguientes expresiones son identidades:

30. $\dfrac{\text{sen}t}{1-\cos t} = \dfrac{1+\cos t}{\text{sen}t}$

31. $\dfrac{1}{\tan t + \cot t} = \text{sen}t\cos t$

32. $\dfrac{1}{\cos t} - \cos t = \text{sen}t\tan t$

33. $\cos^4\alpha - sen^4\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

34. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$

35. $\text{sen}9\beta + \text{sen}10\beta + \text{sen}11\beta + \text{sen}12\beta = 4\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta\,\text{sen}\frac{21\beta}{2}$

36. $\text{sen}4\alpha - \text{sen}5\alpha - \text{sen}6\alpha + \text{sen}7\alpha = -4\text{sen}\frac{\alpha}{2}\text{sen}\alpha\,\text{sen}\frac{11\alpha}{2}$

37. $(\text{sen}\alpha)^{-1} + (\tan\alpha)^{-1} = \cot\frac{\alpha}{2}$

38. $\cos 4\alpha - \text{sen}4\alpha\cot 2\alpha = -1$

39. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 4\alpha}{\text{sen}^{-2}3\alpha - 1} = 2$

40. $\dfrac{1-2\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}2\alpha} = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

41. $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\cot\alpha - \tan\alpha} = \dfrac{1}{2}\text{sen}4\alpha$

42. $\dfrac{\text{sen}7\alpha}{\text{sen}\alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) = 1$

43. $1 - \frac{1}{4}\text{sen}^2 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

44. $\dfrac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}5\alpha - \text{sen}3\alpha}{\cos 2\alpha - 1 - 2\text{sen}^2 2\alpha} = 2\text{sen}\alpha$

45. $\dfrac{\cot^2 2\alpha - 1}{2\cot 2\alpha} - \cos 8\alpha\cot 4\alpha = \text{sen}8\alpha$

46. $\dfrac{\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha + \text{sen}5\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$

47. $2(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) - 3(\text{sen}^6 x\cos^4 x) + 1 = 0$

48. Verifique:

$\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan(\frac{\pi}{4} + x)$

Verifique:

49. $1 + \cot\alpha = \dfrac{\sec\alpha + \cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

50. $\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$

51. $(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$

52. $\tan\alpha - \cot\alpha = (\tan\alpha - 1)(\cot\alpha + 1)$

53. $\cot\alpha + \dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$

54. $(1+\text{sen}\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right) = \cos\alpha$

55. $\dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{2}{\text{sen}\alpha}$

56. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

57. $\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)(\text{sen}\alpha + \cos\alpha) = 2 + \dfrac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}$

58. $\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)(\text{sen}\alpha + \cos\alpha) = \cot\alpha - \tan\alpha$

59. $1 - 2\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

Calcule sin usar las tablas:

60. $\dfrac{\text{sen}^2 120°\cos(-180°)}{\tan(-135°)\cot 405°}$

61. $\dfrac{9\text{sen}150° - 4\cos 240° + 12\text{sen}600°}{3\text{sen}(-45°) - 2\cos(-420°)}$

62. $\tan 10°\tan 20°\tan 30°\tan 40°\tan 50°\tan 60°\tan 70°\tan 80°$

63. $\text{sen}1200° + \cos(-1080°)$

64. $4\text{sen}120°\tan 300°$

65. $2\text{sen}120° - \tan 240°$

66. $3\cos(-300°)\text{sen}45°\tan 135°$

67. $2\text{sen}^2 225° - \cot 330°\tan 405°$

68. $10\cot 315°\text{sen}(-150°)\cos 225°$

Sin usar tablas, simplifique:

69. $\text{sen}53° + \text{sen}(-53°) + \cos 62° - \cos(-62°)$

70. $\cos 21° + \text{sen}(-57°) + \cos(-21°) + \cos(-33°)$

71. $\text{sen}(\pi - 1) - \cos(\frac{\pi}{2} - 1)$

72. $\tan 28°\tan 288° + \text{sen}32°\text{sen}148° - \text{sen}302°sen122°$

73. $\dfrac{\tan(\pi - t)\cos(2\pi - t)}{\cot(\pi + t)\text{sen}(\pi - t)}$

74. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \text{sen}(\pi + x)$

75. $\cot(2\pi - x) + \cot(2\pi + x) - \tan x$

Simplifique:

76. $\text{sen}^2 62° + \text{sen}^2 28°$

77. $\tan 44°\tan 45°\tan 46°$

78. $(\text{sen}35° + \cos 35°)(\text{sen}35° - \cos 35°) + 2\text{sen}^2 55°$

Calcule sin el uso de las tablas:

79. $\cos^2 15° - \text{sen}^2 75°$

80. $\cot 75°$

81. $\text{sen}7°30$

Resuelva:

82. $\begin{cases} \text{sen}2x = 1 \\ x^2 + 48 < 14x \end{cases}$

83. $\begin{cases} \tan\frac{x}{2} = 0 \\ x^2 + 10x + 24 < 0 \end{cases}$

84. $\begin{cases} \tan 2x = \sqrt{3} \\ x^2 + 15 < 8x \end{cases}$

85. $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 1 \\ x^2 + 14x + 13 < 0 \end{cases}$

86. $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ x^2 + 77 < 18x \end{cases}$

87. $\begin{cases} \text{sen}\frac{x}{3} = 0 \\ x^2 + 17x + 70 < 0 \end{cases}$

Verifique si existen los ángulos α y β tal que se cumplen:

88. $2 - \text{sen}\alpha = 1.5$

89. $1 + \cos\beta = 3$

90. $\text{sen}\alpha\cos\beta = 1\frac{1}{3}$

91. $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = -2$

92. $\text{sen}\alpha + \cos\beta = 0$

93. $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = 1$

94. $\tan\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$

95. $\cot\alpha\,\text{sen}\alpha = -1.2$

Simplifique las siguientes expresiones:

96. $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$

97. $\cot\alpha + \dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$

98. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$

99. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha$

100. Simplifique la siguiente expresión:

$\tan(\frac{\pi}{4} - x)\tan(\frac{\pi}{4} + x)$

Si se sabe que: $\text{sen}(180° + \alpha) = -\frac{1}{2}$, calcule lo siguiente:

101. $\text{sen}(270° + \alpha)$

102. $\cos(90° + \alpha)$

103. $\tan(\alpha - 270°)$

104. $\cot(180° - \alpha)$

Si se sabe que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ $(90° < \alpha < 180°)$ calcular:

105. $\tan(180° - \alpha)$

106. $\mathrm{sen}(90° + \alpha)$

107. $\cos(270° - \alpha)$

108. $\cot(360° - \alpha)$

109. Si se sabe que $\alpha + \beta = 180°$ y $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ calcule $\mathrm{sen}\beta$; $\tan\beta$; y $\tan\alpha$.

Calcule:

110. $\mathrm{sen}\alpha - \cos\alpha$, si se sabe que $\mathrm{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{8}$

111. $\mathrm{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha$, si se sabe que $\mathrm{sen}\alpha + \cos\alpha = p$

112. $\tan 2\alpha + \cot^2\alpha$, si se sabe que $\tan\alpha + \cot\alpha = 3$

113. Se sabe que $\cos x = 0.9$ y $x \in (2\pi, \frac{5}{2}\pi)$, calcule:

114. Se sabe que $\mathrm{sen}x = -0.3$ y $x \in (9\pi, 10\pi)$, calcule:

a. $\cos x$

b. $\tan x$

c. $\cot x$

d. $\cos(3\pi - x)$

e. $\cos(\frac{9}{2}\pi + x)$

f. $\mathrm{sen}(\frac{7}{2}\pi + x)$

g. $\tan(\frac{21}{2}\pi - x)$

h. $\cot(\frac{13}{2}\pi + x)$

Se sabe que $\mathrm{sen}x + \cos x = \frac{1}{2}$, calcule:

115. $\mathrm{sen}x \cos x$

116. $\mathrm{sen}x - \cos x$

117. $\mathrm{sen}^3x + \cos^3x$

118. $\mathrm{sen}^4x + \cos^4x$

119. Calcule $\mathrm{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$ si se sabe que $\cot\alpha = m$ y $90° < \alpha < 180°$.

120. Calcule $x = \mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta$ si se sabe que $\tan\alpha = -1$ y $\tan\beta = -\sqrt{3}$

121. Presente $\tan 3x$ en términos de $\tan x$.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

122. $\mathrm{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

123. $\mathrm{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

124. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

125. $\cos^2 x = 1$

126. $4\mathrm{sen}^2 x = 3$

127. $\mathrm{sen}^2 x + 2\mathrm{sen}x - 3 = 0$

128. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

129. $\tan^2 x = 3$

130. $\cot^2 x = 1$

131. $\tan x + \cot x = 2$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

132. $4\mathrm{sen}x\cos 2x\,\mathrm{sen}3x = \mathrm{sen}4x$ para $x \in (o, \pi)$

133. $\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

134. $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

135. $\cot(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

136. $\cot\frac{x}{4} = -\sqrt{3}$

137. $\mathrm{sen}(\frac{5}{4}\pi + x) - \mathrm{sen}(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$

138. $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) + \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$

139. $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) + \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = -1$

140. $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) - \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$

Resuelva los siguientes ejercicios

141. $\mathrm{sen}x - \mathrm{sen}2x = 0$

142. $2\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}x = 0$

143. $2\cos x - \mathrm{sen}2x = 0$

144. $\tan^2 x - \tan x = 0$

145. $\cos 2x\,\mathrm{sen}x + \mathrm{sen}x = 5\cos 2x + 5$

146. $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}x - \mathrm{sen}2x = 0$

147. $5\cos x = \mathrm{sen}2x$

148. $\cos^2 3x - \mathrm{sen}^2 3x = -1$

149. $\cos 3x = \frac{1}{3}\cos^2 3x$

150. $2\mathrm{sen}x\cos x + 4\cos x = \mathrm{sen}x + 2$

151. $\cos x + \mathrm{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

152. $\mathrm{sen}2x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

153. $\mathrm{sen}x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

154. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \mathrm{sen}4x = 0$

155. $\mathrm{sen}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) + \cos 3x = 0$

156. $\mathrm{sen}\left(\frac{7}{2}\pi - x\right) - \cos 4x = 0$

157. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \mathrm{sen}\frac{x}{2} = 0$

158. $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) + \cos 3x = 0$

159. $\cos 2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + \cos 2x = 0$

160. $\cos 4x + \mathrm{sen}3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = 0$

161. $\mathrm{sen}(x + \pi) + \cos(3x + \pi) = 0$

162. $\mathrm{sen}3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + \cos 2(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

163. $\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \cos 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

164. $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 0$

165. $\mathrm{sen}(7\pi + x) + \cos(4x - \pi) = 0$

166. $\mathrm{sen}7\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) + \cos 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

167. $\mathrm{sen}2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + \mathrm{sen}2(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

168. $\cos(4x + \pi) + \mathrm{sen}2(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

169. $\cos 4\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) - \mathrm{sen}(x - \pi) = 0$

170. $\cos 5\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + \mathrm{sen}3(x + \frac{\pi}{2}) = 0$

171. $\cos x + \mathrm{sen}x = 1$

172. $\cos 4x = \mathrm{sen}4x + 1$

173. $-\cos x + \mathrm{sen}x = 1$

174. $-\cos x = \mathrm{sen}x + 1$

175. $\sqrt{3}\cos x + \mathrm{sen}x = \sqrt{2}$

176. $\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}x = -1$

177. $\cos x + \mathrm{sen}x = \sqrt{2}$

178. $\cos 2x + \mathrm{sen}2x = \sqrt{2}$

179. $\mathrm{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{2} + \cos\frac{x}{2}$

180. $\cos(-x) + \mathrm{sen}(-x) = -\sqrt{2}$

181. $2\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \mathrm{sen}x = 2$

182. $\sqrt{3}\cos x - 2\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\mathrm{sen}x = 2$

183. $\sqrt{3}\cos x + \mathrm{sen}(\pi + x) = \sqrt{2}$

184. $\sqrt{3}\cos(\pi - x) + \mathrm{sen}x = \sqrt{2}$

185. $\cos 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = -\sqrt{2}$

186. $\cos(-2x) + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

187. $\cos(\pi - 2x) + \mathrm{sen}2x = -\sqrt{2}$

188. $\cos(3x - \pi) + \mathrm{sen}3x = -1$

189. $\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) = -1$

190. $\cos(\frac{13}{2}\pi + 4x) + \mathrm{sen}4x = -1$

191. $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x = \cos 4x$

192. $2\operatorname{sen}x\cos x - \sqrt{3}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2\operatorname{sen}5x$

193. $2\operatorname{sen}x\cos x - \cos 2x = \sqrt{2}\operatorname{sen}4x$

194. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = \cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen}x$

195. $\cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen}2x = 2\cos 4x$

196. $\sqrt{3}(\cos x - \operatorname{sen}x) = \sqrt{3}\cos 2x - \operatorname{sen}2x$

197. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = 2\cos 3x$

198. $\cos 7x - \operatorname{sen}5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \operatorname{sen}7x)$

199. $\cos x + \operatorname{sen}x = \sqrt{2}\operatorname{sen}3x$

200. $\cos 4x + \operatorname{sen}2x = \sqrt{3}(\operatorname{sen}4x - \cos 2x)$

201. $1 - \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

202. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$

203. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

204. $1 + \cos x - \cos 2x = \cos 3x$

205. $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}4x = 0$

206. $\cos\frac{x}{2} + \cos x + \cos\frac{3}{2}x + \cos 2x = 0$

207. $\operatorname{sen}8x - \operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}2x$

208. $\cos 4x + \cos 2x = \operatorname{sen}9x + \operatorname{sen}3x$

209. $\cos 6x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}6x = \cos 2x$

210. $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}5x$

211. $\cos 7x\cos 13x = \cos x\cos 19x$

212. $\operatorname{sen}11x\cos 6x = \operatorname{sen}9x\cos 4x$

213. $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}6x = \operatorname{sen}8x\operatorname{sen}3x$

214. $\cos 3x\cos 5x = \cos 4x\cos 6x$

215. $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}5x\operatorname{sen}7x$

216. $\operatorname{sen}2x\cos 4x = \operatorname{sen}6x\cos 8x$

217. $\operatorname{sen}5x\cos 3x = \operatorname{sen}9x\cos 7x$

218. $\cos 3x\cos 5x = \cos x\cos 7x$

219. $\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}5x$

220. $\operatorname{sen}x\cos 5x = \operatorname{sen}2x\cos 4x$

221. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$

222. $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}5x = \operatorname{sen}4x$

223. $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 4x) + \cos 2x = 3\cos 3x$

224. $\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}4x - \cos x = 0$

225. $\operatorname{sen}x\cos 5x = \operatorname{sen}6x$

226. $\operatorname{sen}3x = \cos x - \operatorname{sen}x$

227. $\cos(\frac{\pi}{2} + 5x) + \operatorname{sen}x = 2\cos 3x$

228. $\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x + \cos 5x = 0$

229. $\cos x\cos 5x = \cos 6x$

230. $\operatorname{sen}2x\cos 8x + \operatorname{sen}6x = 0$

231. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2 4x = 2$

232. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

233. $\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 4x = \operatorname{sen}^2 6x + \operatorname{sen}^2 8x$

234. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2 x = \cos^2\frac{3}{2}x + \cos^2 2x$

235. $\cos^2 2x + \cos^2 4x = \operatorname{sen}^2 6x + \operatorname{sen}^2 8x$

236. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x = \frac{3}{2}$

237. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2 x + \cos^2\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$

238. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x = \frac{1}{2}$

239. $\dfrac{\tan(2x + \frac{\pi}{2})}{\tan(x + \frac{\pi}{4})} = 0$

240. $(1 - \cos 2x)\cot x = 0$

241. $\dfrac{x}{1 - \cos x} = 0$

242. $\dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen}2x} = 0$

243. $\dfrac{\tan 3(x + \pi)}{\tan x} = 0$

244. $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} + 3x)}{\operatorname{sen}x} = 0$

245. $\dfrac{\operatorname{sen}2x}{1 + \cos 2x} = 0$

246. $\dfrac{\operatorname{sen}2(x + \pi)}{\cos x} = 0$

247. $(1 - \cos 4x)\cot 2x = 0$

248. $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}x} = 0$

249. $\tan x + \tan 3x = 0$

250. $\cot 3x + \cot x = 0$

251. $\tan x = \tan 9x$

252. $\cot x = \cot 4x$

253. $\tan 3x = \tan x$

254. $\cot 5x + \cot x = 0$

255. $\cot 6x + \cot 2x = 0$

256. $\tan 5x = \tan x$

257. $\tan 7x + \tan x = 0$

258. $\cot 2x = \cot 8x$

259. $2\tan^3 x - 2\tan^2 x + 3\tan x - 3 = 0$

260. $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan x - 2 = 0$

261. $8\tan^2\frac{x}{2} = 1 + \sec x$

262. $\cot x + \dfrac{\operatorname{sen}x}{1 + \cos x} = 2$

263. $\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}7x = \sqrt{3}\operatorname{sen}2x$

264. $\operatorname{sen}x + \tan x = 4\cos x + 4$

265. $\cos 3x\tan 5x = \operatorname{sen}7x$

266. $1 - \cos^2 2x = \operatorname{sen}3x - \cos(\frac{\pi}{2} + x)$

267. $1 - \cos(\pi - x) + \operatorname{sen}\frac{\pi + x}{2} = 0$

268. $\cos 3x + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x = 0$

269. $(1 + \cos 4x)\operatorname{sen}x = \cos^2 2x$

270. $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x = 4\operatorname{sen}^2 x$

271. $\tan 3x + \cos 6x = 1$

272. $5\cos 2x = 4\operatorname{sen}x$

273. $\cos 3x = 2\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi + x)$

274. $\operatorname{sen}4x = 2\cos^2 x - 1$

275. $\operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}2x = \frac{1}{2}\tan 2x$

276. $\cot x - \cos 2x = 1$

277. $\operatorname{sen}3x = 2\operatorname{sen}x$

278. $\operatorname{sen}3x\cos 3x = \operatorname{sen}2x$

279. $2\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

280. $2\operatorname{sen}^2(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

281. $4\operatorname{sen}^2 x = 3$

282. $3\tan^2 x = 1$

283. $2\cos^2\frac{2}{5}x = 1$

284. $\tan^2 2x = 3$

285. $\tan^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

286. $\cot^2 3x = 1$

287. $4\cos^2 x = 1$

288. $4\operatorname{sen}^2 x = 1$

289. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

290. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

291. $\operatorname{sen}^2 x + 6\operatorname{sen}x + 5 = 0$

292. $\tan^2 x - 6\tan x + 5 = 0$

293. $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

294. $2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen}x + 2 = 0$

295. $2\operatorname{sen}^2 x - 9\operatorname{sen}x - 5 = 0$

296. $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

297. $3\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen}x + 4 = 0$

298. $2\cot^2 x + \cot x - 1 = 0$

299. $\cos\frac{x}{4} - \operatorname{sen}\frac{x}{8} = 0$

300. $\operatorname{sen}\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{3} = 0$

301. $3(1 - \operatorname{sen}x) = 1 + \cos 2x$

302. $\cos 2x + 3\operatorname{sen}x = 2$

303. $52\operatorname{sen}^2 x + 100\cos x = 89$

304. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$

305. $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x = 0.25$

306. $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen}x - 4 = 0$

307. $6\cot^2 x - 2\cos^2 x = 5$

308. $\cos 2x - 5\operatorname{sen} x - 3 = 0$

309. $12\cos^4 2x - 5\operatorname{sen}^4 2x + 5 = 0$

310. Demuestre que si $x = a\cos\alpha$ y $y = b\operatorname{sen}\alpha$, entonces $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Suponga, que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = m$, calcule:

311. $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

312. $\operatorname{sen}^3 + \cos^3\alpha$

313. $(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$

314. $\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha$

Calcule α y β si

315. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$ y $\beta \in \langle 0, 90°\rangle$

316. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$ y $\beta \in \langle 0, 90°\rangle$

Si α, β y θ son ángulos de un triángulo, demuestre que:

317. $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$

318. $\cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}$

319. $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

320. ¿Para cuál valor de "a" la ecuación $\cos^2 + \cos x + a = 0$ tiene solución?

Resuelva las siguientes desigualdades.

321. $\operatorname{sen} x \le -0.5$

322. $\operatorname{sen} x < 1$

323. $\operatorname{sen} x > -1$

324. $\operatorname{sen}^2 x < 1$

325. $\cos x > -0.5$

326. $\cos^2 x \le 0.25$

327. $\tan x > -1$

328. $\cot^2 x < 1$

329. $\cot^2 x > 1$

330. $\cos^2 x + \cos x \ge 2$

331. $\operatorname{sen} x \tan x \ge 0$

332. $|\operatorname{sen} x| > |\cos x|$

333. $|\operatorname{sen} x| \le |\cos x|$

Demuestre que para cualquier $x \in R$ se cumplen las siguientes desigualdades:

334. $\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos x + 3 \ge 0$

335. $4 + 4\operatorname{sen} x - \cos^2 x \ge 0$

336. $\operatorname{sen}^2 x + 4\cos x - 4 \le 0$

Calcule

337. $\operatorname{sen} 2x$

338. $\cos 2x$ si se sabe que $\tan x = t$

Demuestre que

339. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$

340. $\tan 2x = \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}$

341. $\tan 3x = \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}$

Demuestre que si $\cos\alpha + \cos\beta \ne 0$ entonces

342. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

343. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Demuestre que para cualquier α

344. $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$

345. $\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha - 45°)$

Sin el uso de tablas, demuestre que:

346. $\cos 20° - \cos 80° + \cos 140° = 6$

347. $\operatorname{sen} 20° - \operatorname{sen} 80° + \operatorname{sen} 140° = 0$

Demuestre que para cualquier α

348. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

349. $1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Demuestre que para cualquier α

350. $\operatorname{sen}(\alpha + 60°) + \operatorname{sen}(\alpha - 60°) = \operatorname{sen}\alpha$

351. $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}\cos\alpha$

¿En qué condiciones se cumplen las siguientes identidades?

352. $\cot 2x = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$

353. $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2}{\tan x + \cot x}$

354. $\dfrac{1}{1 + \tan x \tan 2x} = \cos 2x$

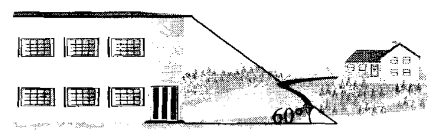
355. $\dfrac{\tan^2(45° + x) - 1}{\tan^2(45° + x) + 1} = \operatorname{sen} 2x$

Demuestre las siguientes fórmulas.

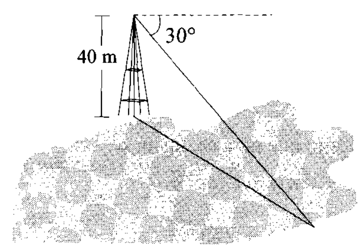
356. $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$

357. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 7x$

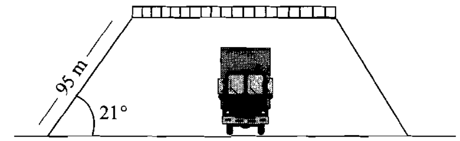
358. Encuentre la altura de un edificio si a 8.66 metros de su base, el ángulo entre el suelo y la azotea del edificio es de 60°.



359. Una torre de 40 metros de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30°. ¿Cuál es el ancho del lago?



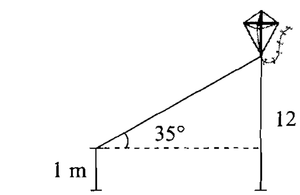
360. El ángulo de elevación de una rampa de 9.5 metros que lleva a un puente sobre una avenida es de 21°. Determine la altura que puede tener un camión para pasar por debajo del puente.



361. Calcule la sombra proyectada sobre el suelo de una persona que mide 1.67 metros si el ángulo de elevación del Sol es de 40°.

362. ¿Cuál es la altura de un edificio cuya sombra horizontal es de 60 metros cuando el ángulo de elevación del Sol es de 46°?

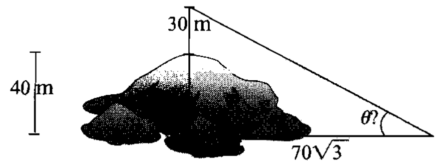
363. Un niño tiene en sus manos un papalote a 1 metro del piso. Si el papalote está a 12 metros del piso y la cuerda del papalote forma un ángulo de 35° con la horizontal, ¿cuántos metros de cuerda está usando?



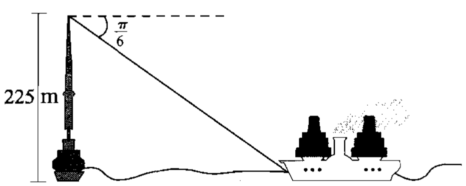
364. Un avión está volando alejándose de un observador en tierra a una razón constante y mantiene una altura de 5850 metros. En cierto momento el ángulo de elevación es de 42° y 20 segundos después 30° ¿qué tan rápido está volando el avión?

365. La altura de la cima de una colina se eleva 40 metros sobre el nivel de la pista de un aeropuerto cercano, y la distancia horizontal desde el extremo final de una pista hasta un punto que se encuentra directamente bajo la cima de la colina es de $70\sqrt{3}$ metros. Un avión despega al final de la pista en dirección a la colina con un ángulo que permane-

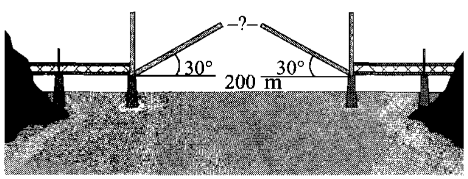
ce constante para librarla. Si el piloto desea pasar 30 metros sobre la cima, ¿cuál debe ser el ángulo con que debe elevarse? Exprese su respuesta en grados y radianes.



366. Un puesto de observacion, que está en la costa, se encuentra a una altura de 225 metros sobre el nivel del mar. Si el ángulo de depresión desde este punto hasta un barco en el mar es $\frac{\pi}{6}$. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la orilla del mar?

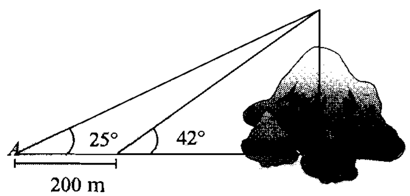


367. Un puente sobre un río tiene 200 metros de largo. Las dos secciones del puente rotan hacia arriba formando un ángulo de 30° para dar paso a los barcos. Un motociclista quiere saltar de una sección a otra, él sabe que puede dar saltos hasta de 20 metros, ¿puede el motociclista saltar de un lado al otro, sin peligro?



368. Desde lo alto de un hotel con vista al mar, un turista observa una lancha que navega directamente al hotel. Si el turista está a 32 metros sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión de la lancha cambia de 30° a 45° durante la observación, ¿qué distancia recorre la lancha?

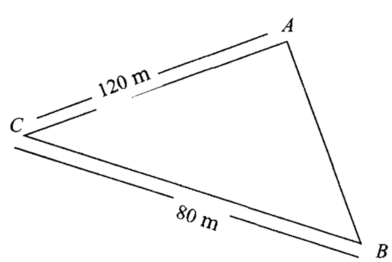
369. Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide 25°. Cuando él se encuentra en un punto a 200 metros más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 42°. ¿Cuál es la altura de la montaña ? (Suponga que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta).



370. Una escalera se apoya en una pared vertical, formando un ángulo θ con la horizontal y su punto más alto está a $4\sqrt{3}$ metros de altura respecto al suelo. Cuando el ángulo disminuye 15° el punto más alto de la escalera queda a $2\sqrt{2}$ metros de altura. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

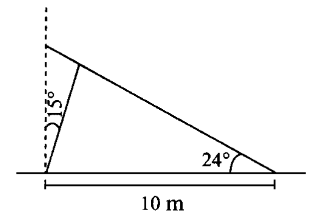
371. La gran pirámide de Egipto, es regular y de base cuadrada. El ángulo de inclinación de las caras con respecto a la base es de 52°. Desde una distancia de 100 m, perpendicular al punto medio de un lado de la base, se ve la punta de la base con un ángulo de elevación de 34°. Calcule la altura de la pirámide.

372. Dos puntos A y B están señalados en la orilla de un lago. Un topógrafo se encuentra en un punto C tal que AC = 120 metros y BC = 80 metros, y determina que ACB mide 52°. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

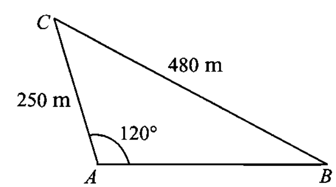


373. Un edificio está situado al final de una calle que tiene una inclinación de 10°. En un punto P a 210 metros del edificio, el ángulo subtendido por éste es de 16°. ¿Cuál es la altura del edificio?

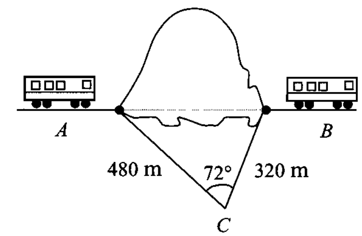
374. Un poste telegráfico está inclinado con un ángulo de 15° de la vertical del sol. El poste emite una sombra de 10 metros de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de 24°. Encuentre la logitud del poste.



375. Se desea cercar una finca triangular cuyos vértices son A, B y C, pero al empezar el trabajo se descubre que la marca B ha desaparecido. El título de la propiedad indica que la distancia de B a C es de 480 metros, la distancia de C a A es de 250 metros, y el ángulo es de 120°. Determine la posición de S obteniendo la distancia de A a B.



376. Los puntos A y B son los extremos de un túnel que pasará debajo de una montaña. Desde un punto C, lejos de la montaña, un topógrafo puede ver esos puntos y determina que AC mide 480 metros, CB mide 320 metros y el ángulo C mide 72°. ¿Cuál es la longitud del túnel?



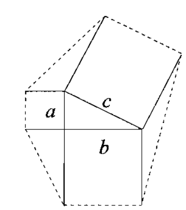
377. En un momento dado, un avión está directamente arriba de una carretera recta que une a dos pueblos, los ángulos de depresión a estos poblados son 12° y 8°. Si la distancia entre los dos pueblos es de 11.3 km, ¿a qué distancia está el avión de cada uno de los pueblos? ¿A qué altura está el avión en ese instante?

378. Dos guardabosques separados 3 km en los puntos A y B observan un incendio en un punto C del bosque. El guardabosque A mide un ángulo A de 44.3° y el guardabosque B mide un ángulo B de 76.5°. ¿A qué distancia está el fuego desde un camino recto que va de A a B?

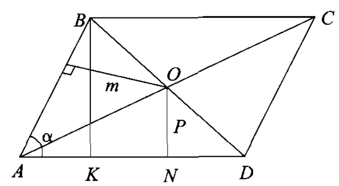
379. Aplique la ley de los senos para mostrar que el área de un triángulo ABC puede darse como:

$$K = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$$

380. Alrededor de una ilustración del teorema de Pitágoras con catetos a y b e hipotenusa igual a c, se dibujan unas líneas punteadas como en la siguiente figura. ¿Cuál es el área de la región limitada por estas líneas?



381. En un paralelogramo se dan el ángulo agudo x, y las distancias m y p entre el punto de intersección de las diagonales y los lados desiguales. Determine las diagonales y el área del paralelogramo.



382. Sean a y b las bases de un trapecio y c y d sus lados, determine sus diagonales m y n.