

## 2. CINEMATICA

La descripción matemática del movimiento constituye el objeto de una parte de la física denominada cinemática. Tal descripción se apoya en la definición de una serie de magnitudes que son características de cada movimiento o de cada tipo de movimientos. Los movimientos más sencillos son los rectilíneos y dentro de éstos los uniformes. Los movimientos circulares son los más simples de los de trayectoria curva. Unos y otros han sido estudiados desde la antigüedad ayudando al hombre a forjarse una imagen o representación del mundo físico.

GALILEO GALILEI (1564-1642)

La observación y el estudio de los movimientos ha atraído la atención del hombre desde tiempos remotos. Así, es precisamente en la antigua Grecia en donde tiene su origen la sentencia «Ignorar el movimiento es ignorar la naturaleza», que refleja la importancia capital que se le otorgaba al tema. Siguiendo esta tradición, científicos y filósofos medievales observaron los movimientos de los cuerpos y especularon sobre sus características. Los propios artilleros manejaron de una forma práctica el tiro de proyectiles de modo que supieron inclinar convenientemente el cañón para conseguir el máximo alcance de la bala. Sin embargo, el estudio propiamente científico del movimiento se inicia con Galileo Galilei. A él se debe una buena parte de los conceptos que aparecen recogidos en este capítulo.

### EL MOVIMIENTO Y SU DESCRIPCIÓN

Se dice que un cuerpo se mueve cuando cambia su posición respecto de la de otros supuestos fijos, o que se toman como referencia. El movimiento es, por tanto, cambio de posición con el tiempo.

#### El carácter relativo del movimiento

De acuerdo con la anterior definición, para estudiar un *movimiento* es preciso fijar previamente la *posición del observador* que contempla dicho movimiento. En física hablar de un observador equivale a situarlo fijo con respecto al objeto o conjunto de objetos que definen *el sistema de referencia*. Es posible que un mismo cuerpo esté en reposo para un observador -o visto desde un sistema de referencia determinado- y en movimiento para otro.

Así, un pasajero sentado en el interior de un avión que despegará estará en reposo respecto del propio avión y en movimiento respecto de la pista de aterrizaje. Una bola que rueda por el suelo de un vagón de un tren en marcha, describirá movimientos de características diferentes según sea observado desde el andén o desde uno de los asientos de su interior.

El estado de reposo o de movimiento de un cuerpo no es, por tanto, *absoluto* o independiente de la situación del observador, sino *relativo*, es decir, depende del sistema de referencia desde el que se observe.

### El concepto de cinemática

Es posible estudiar el movimiento de dos maneras:

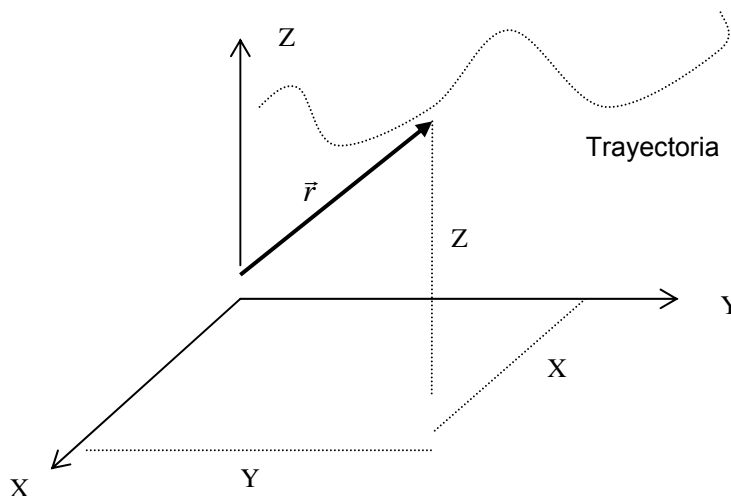
a) describiéndolo, a partir de ciertas magnitudes físicas, a saber: posición, velocidad y aceleración (cinemática);

b) analizando las causas que originan dicho movimiento (dinámica).

En el primer caso se estudia *cómo* se mueve un cuerpo, mientras que en el segundo se considera el *porqué* se mueve. Por lo tanto, la cinemática es la parte de la física que estudia *cómo* se mueven los cuerpos sin pretender explicar las causas que originan dichos movimientos.

### **Definiciones en el marco de la cinemática.**

- a. **Vector de posición:** Es un vector, en general tridimensional, el cual define la posición de una partícula o cuerpo. En coordenadas cartesianas rectangulares, sus componentes X, Y y Z pueden ser estudiadas por separado. Generalmente se designa por el vector  $\vec{r}$  que va desde el origen del sistema de coordenadas hasta el lugar donde se encuentra la partícula.



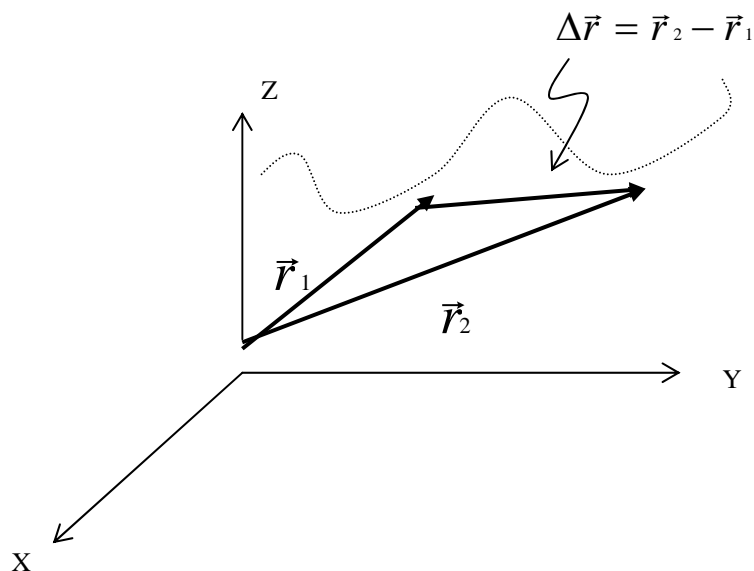
Teniendo en cuenta la definición anterior, se dice que una partícula se mueve respecto a un sistema de coordenadas, cuando su vector de posición cambia a medida que transcurre el tiempo.

En el sistema internacional (SI), el vector de posición se expresa en [m].

- b. **Trayectoria:** Para simplificar el estudio del movimiento, representaremos a los cuerpos móviles por puntos geométricos, olvidándonos, por el momento, de su forma y tamaño. Se llama trayectoria a la línea que describe el punto que representa al cuerpo en movimiento, conforme va ocupando posiciones sucesivas a lo largo del tiempo. La estela que deja en el cielo un avión a reacción o los raíles de una línea de ferrocarril son representaciones aproximadas de esa línea imaginaria que se denomina trayectoria.

Según sea la forma de su trayectoria los movimientos se clasifican en rectilíneos y curvilíneos. Un coche que recorra una calle recta describe un movimiento rectilíneo, mientras que cuando tome una curva o dé una vuelta a una plaza circular, describirá un movimiento curvilíneo.

- c. **Vector desplazamiento:** Si una partícula se mueve desde un punto a otro, el vector desplazamiento o desplazamiento de la partícula, representado por  $\Delta \vec{r}$ , se define como el vector que va desde la posición inicial a la final, es decir:



Note que en general el desplazamiento no coincide con la trayectoria que sigue la partícula. ¿En que caso(s) coincide?.

En el sistema Internacional, el desplazamiento se expresa en [m].

## LA VELOCIDAD

La descripción de un movimiento supone el conocer algo más que su trayectoria. Una característica que añade una información importante sobre el movimiento es la velocidad.

- d. **Velocidad media:** Suponga que en cierto instante  $t_1$ , una partícula se encuentra en su posición definida por el vector de posición  $\vec{r}_1$  y luego en el instante  $t_2$ , con su posición definida por  $\vec{r}_2$ . El intervalo de tiempo que ha

transcurrido es  $\Delta t = t_2 - t_1$  y el desplazamiento que ha efectuado la partícula es  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Se denomina velocidad media por  $\langle \vec{v} \rangle$  y queda definida por:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

En el sistema Internacional, la velocidad se expresa en  $\left[ \frac{m}{s} \right]$ . Sin embargo, resulta muy frecuente en la vida diaria la utilización de una unidad práctica de velocidad, el *kilómetro/hora* [km/hr], que no corresponde al SI. La relación entre ambas es la que sigue:

$$1 \left[ \frac{km}{hr} \right] = \frac{1km}{1hr} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3,6} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

o inversamente

$$1 \left[ \frac{m}{s} \right] = 3,6 \left[ \frac{km}{hr} \right].$$

Por otro lado, es habitual escuchar, de vez en cuando, que la velocidad media característica de circulación en automóvil es, por ejemplo, de 25 [km/hr]. Ello no significa que los automóviles se desplacen por las calles siempre a esa velocidad. Tomando como referencia un trayecto de 10 [km], el auto puede alcanzar los 60 o incluso los 70 [km/hr], pero en el trayecto completo ha de frenar y parar a causa de las retenciones, de modo que para cubrir los 10 [km] del recorrido establecido emplea media hora. La velocidad del coche ha cambiado con el tiempo, pero, en promedio, y a efectos de rapidez el movimiento equivale a otro que se hubiera efectuado a una velocidad constante de 20 [km/hr].

- e. **Velocidad instantánea:** En general, la velocidad con la que se mueve un coche, un avión o una motocicleta, por ejemplo, varía de un instante a otro. Ello queda reflejado en el movimiento de la aguja de sus respectivos velocímetros. El valor que toma la velocidad en un instante dado recibe el nombre de *velocidad instantánea*.

Aun cuando la noción de instante, al igual que la noción de punto, constituye una abstracción, es posible aproximarse bastante a ella considerándola como un intervalo de tiempo muy pequeño. Así, la lectura del velocímetro se produce en centésimas de segundos y ese tiempo puede ser tomado en el movimiento de un coche como un instante, ya que durante él la velocidad prácticamente no cambia de magnitud.

Si se analiza el movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y se divide ese intervalo en sub-intervalos, por ejemplo, las velocidades medias en esos sub-intervalos no tiene necesariamente que coincidir con la velocidad media del intervalo completo. Esto significa que si bien la velocidad media es representativa

del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo considerado como un todo, no da cuenta del movimiento de la partícula instante a instante. Si el intervalo de tiempo considerado es relativamente grande, usar la velocidad media para describir el movimiento de la partícula instante a instante nos puede llevar a cometer errores grandes. Sin embargo si los intervalos de tiempo son relativamente pequeños, la velocidad media describe de mejor forma el movimiento de la partícula en cada instante durante ese pequeño intervalo. Por lo tanto, se define la velocidad instantánea de la partícula como la velocidad media de la partícula en un tiempo muy pequeño, denominado infinitesimal, o sea en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

En lenguaje diferencial:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

Observaciones:

- i. Note que a medida que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se hace cada vez mas pequeño, el vector  $\Delta \vec{r}$  se aproxima a la trayectoria, que en el caso infinitesimal, el vector velocidad instantánea queda tangente a la trayectoria
  - ii. ¡La palabra rapidez, en física, se usa para representar la *magnitud* del vector *velocidad*!.
- f. **Aceleración media:** Considere que en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , las velocidades instantáneas de la partícula son  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ . Es decir, en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la partícula sufre una variación de velocidad  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Por lo tanto, la aceleración media o variación temporal media de la velocidad es dada por

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

En el sistema Internacional la aceleración se expresa en  $\left[ \frac{m/s}{s} \right]$ , es decir,  $\left[ \frac{m}{s^2} \right]$ . Por

otro lado, una de las características que definen la “potencia” de un automóvil es su capacidad para ganar velocidad. Por tal motivo, los fabricantes suelen informar de ello al comprador, indicando qué tiempo (en segundos) tarda el modelo en cuestión en alcanzar los 100 [km/hr] partiendo del reposo. Ese tiempo, que no es propiamente una aceleración, está directamente relacionado con ella, puesto que cuanto mayor sea la rapidez con la que el coche gana velocidad, menor será el tiempo que emplea en pasar de 0 a 100 [km/hr]. Un modelo que emplee 5,4 [s] en

conseguir los 100 [km/hr] habrá desarrollado una aceleración que puede calcularse del siguiente modo:

$$\frac{100 \text{ km/hr}}{5,4 \text{ s}} = \frac{100 \cdot \frac{1}{3,6} \text{ m/s}}{5,4 \text{ s}} = 5,1 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right].$$

Lo que significa que ha aumentado su velocidad en 5,1 [m/s] en cada segundo.

- g. **Aceleración instantánea:** A partir del mismo criterio usado para definir el concepto de velocidad instantánea, se define la aceleración instantánea como:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle a \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}.$$

### TIPOS DE MOVIMIENTOS

- a. **Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.):** El movimiento rectilíneo (por ejemplo en la dirección del eje X) y uniforme fue definido, por primera vez, por Galileo en los siguientes términos: «Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, tómense como se tomen, resultan iguales entre sí», o dicho de otro modo, es un movimiento de velocidad constante.

Puesto que la partícula recorre distancias iguales en tiempos iguales;

$$\vec{V} = \langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{X}}{\Delta t} = \text{CONSTANTE.}$$

Como  $\Delta t = t_2 - t_1$  y  $\Delta \vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$ ;

$$\vec{V} = \frac{\vec{X}_2 - \vec{X}_1}{t_2 - t_1}, \text{ es decir}$$

$$\vec{X}_2 = \vec{X}_1 + \vec{V}(t_2 - t_1).$$

Por comodidad, redefiniendo las variables:  $\bar{X}_2 = \bar{X}$  ,  $t_2 = t$  ,  $\bar{X}_1 = \bar{X}_0$  y escogiendo  $t_1 = 0$  , donde  $\bar{X}_0$  representa la posición inicial de la partícula para  $t = 0$  :

$$(2.1) \quad \bar{X} = \bar{X}_0 + \bar{V}t$$

La ecuación (2.1) nos dice que la posición aumenta linealmente con el tiempo. Cabe considerar que tanto la posición inicial  $\bar{X}_0$  , la posición final  $\bar{X}$  y la velocidad  $\bar{V}$  pueden tener sentidos  $\pm \hat{i}$  .

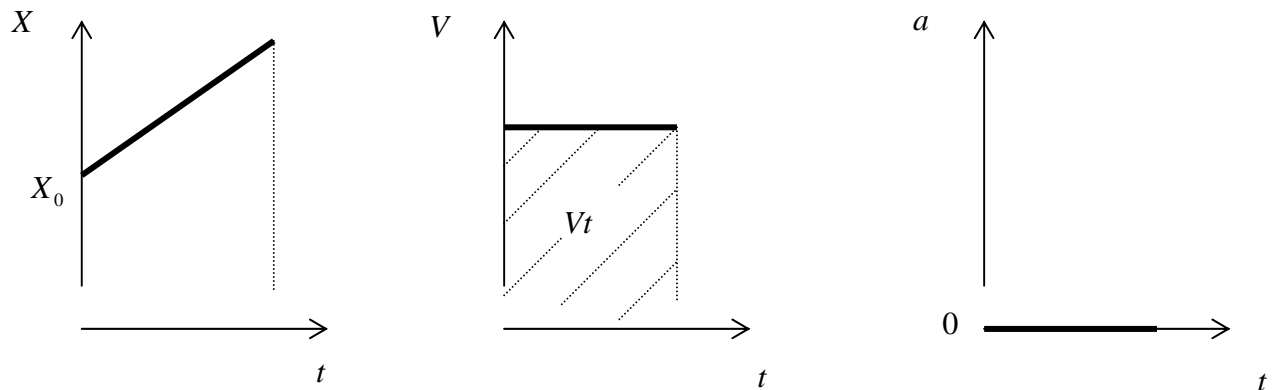
**Gráficos:**

- Para el caso particular de un móvil moviéndose con rapidez  $V$  en el sentido positivo del eje  $X$ , tal que en  $t = 0$  pasa por la posición  $|\bar{X}| = X_0$  hacia la derecha del eje:

Posición:  $X = X_0 + Vt$

Rapidez:  $V = +\text{constante}$

Aceleración:  $a = 0$



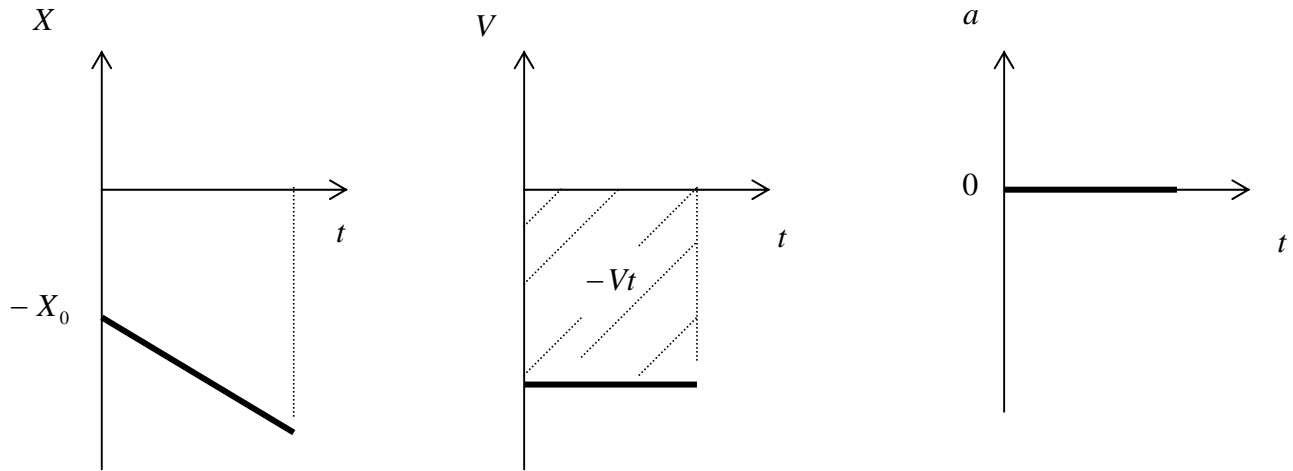
Note que en el gráfico de rapidez v/s tiempo al área bajo la recta da la cantidad  $Vt = X - X_0$  , es decir, la distancia o desplazamiento recorrido por el móvil. Por otro lado, la pendiente en el gráfico posición v/s tiempo es  $m = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X - X_0}{t - 0}$  , es decir:  $\langle V \rangle = V$  .

- Si el móvil en  $t=0$  hubiera pasado por  $\vec{X}_0 = -X_0\hat{i}$ , moviéndose en el sentido  $-\hat{i}$ , los gráficos asociados serían:

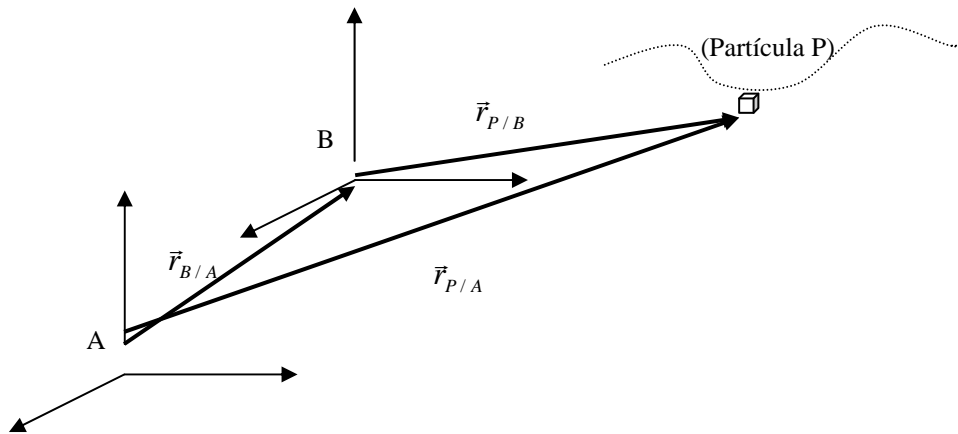
Posición:  $X = -X_0 - Vt$

Aceleración:  $a = 0$

Rapidez:  $V = -\text{constante}$



**Velocidad relativa:** Suponga que tenemos dos sistemas de referencia; uno es el sistema A (el cual podría ser la tierra) y otro B en movimiento relativo respecto a A (el cual podría ser un avión). La partícula P se mueve de acuerdo a su trayectoria y esta es observada desde los sistemas A y B. Los vectores posición relativos quedan definidos de la siguiente manera.



$\vec{r}_{B/A}$  = Vector de posición de B relativo a A,

$\vec{r}_{P/A}$  = Vector de posición de la partícula relativo a A,

$\vec{r}_{P/B}$  = Vector posición de la partícula P relativo a B.



Note que del diagrama de vectores se cumple:  $\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A}$ , es decir: la posición de la partícula respecto a tierra es igual a la suma vectorial de los vectores de posición de la partícula respecto al sistema en movimiento y relativo de los sistemas A y B. De esta manera si tales vectores cambian en el tiempo, encontramos para las velocidades:

$$\vec{V}_{P/A} = \vec{V}_{P/B} + \vec{V}_{B/A},$$

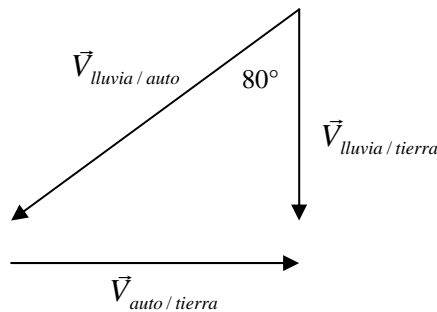
- Ejemplo:

Un hombre que guía a través de una tormenta a 80 [km/hr] observa que las gotas de lluvia dejan trazas en las ventanas laterales haciendo un ángulo de  $80^\circ$  con la vertical. Cuando él detiene su auto, observa que la lluvia está cayendo realmente en forma vertical. Calcular la velocidad relativa de la lluvia con respecto al auto:

- cuando está detenido,
- cuándo se desplaza a 80 [km/hr].

Solución:

El diagrama de vectores velocidad queda representado en la figura. Aplicando la expresión anterior, en la cual la partícula P es la lluvia, el sistema A la tierra y el sistema B, el automóvil, encontramos que  $\vec{V}_{lluvia/tierra} = \vec{V}_{lluvia/auto} + \vec{V}_{auto/tierra}$ .



note que,  $V_{lluvia/tierra} = \frac{80}{\text{tg}(80^\circ)} = 14,1 \left[ \frac{km}{hr} \right]$  y  $V_{lluvia/auto} = \frac{80}{\text{sen}(80^\circ)} = 81,2 \left[ \frac{km}{hr} \right]$ .

b. **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.):** Este es un tipo de movimiento

En una dirección (por ejemplo eje X) y con aceleración constante. Un cuerpo que se mueva con aceleración constante irá ganando velocidad con el tiempo de un modo uniforme, es decir, al mismo ritmo. Eso significa que lo que aumenta su velocidad en un intervalo dado de tiempo es igual a lo que aumenta en otro intervalo posterior, siempre y cuando las amplitudes o duraciones de ambos

intervalos sean iguales. En otros términos, el móvil gana velocidad en cantidades iguales si los tiempos son iguales y la velocidad resulta, en tales casos, directamente proporcional al tiempo.

El *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* es un tipo de movimiento frecuente en la naturaleza. Una bola que rueda por un plano inclinado o una piedra que cae en el vacío desde lo alto de un edificio son cuerpos que se mueven ganando velocidad con el tiempo de un modo aproximadamente uniforme, es decir, con una aceleración constante.

Galileo, que orientó parte de su obra científica al estudio de esta clase de movimientos, al preguntarse por la proporción en la que aumentaba con el tiempo la velocidad de un cuerpo al caer libremente, sugirió, a modo de hipótesis, lo siguiente: «¿Por qué no he de suponer que tales incrementos (de velocidad) se efectúan según el modo más simple y más obvio para todos?... Ningún aditamento, ningún incremento hallaremos más simple que aquél que se sobreañade siempre del mismo modo.» Este es el significado del movimiento uniformemente acelerado, el cual «en tiempos iguales, tómense como se tomen, adquiere iguales incrementos de velocidad». Es decir, aceleración media coincide con la instantánea. Por lo tanto:

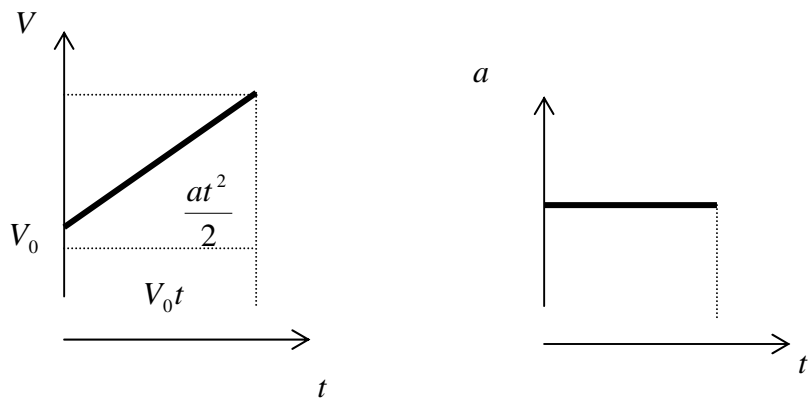
$$\langle \bar{a} \rangle = \bar{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}.$$

Como  $\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0$  y  $\Delta t = t - 0$ , donde  $\vec{V}_0$  es la velocidad inicial en el instante  $t = 0$ :

$$\vec{V} = V_0 + \bar{a}t$$

(2.2)

La ecuación (2.2) nos dice que la velocidad aumenta linealmente con el tiempo. Para  $\vec{V} = V_0 \hat{i}$  y  $\bar{a} = a \hat{i}$ , la gráfica respectiva de (2.2) es



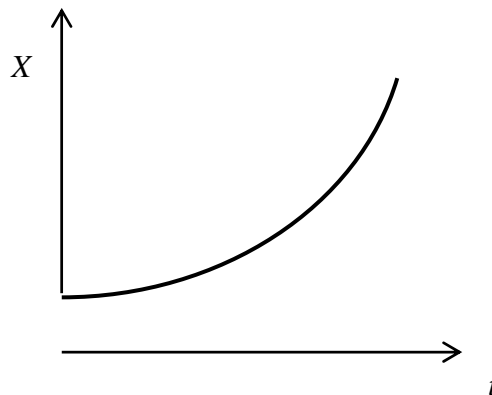
Note que la pendiente en el gráfico  $V$  v/s  $t$  es  $m = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ , es decir la aceleración de la partícula o cuerpo. Además para este mismo gráfico, como el área bajo la curva da el desplazamiento  $X - X_0$ ; esta será: área total = área del rectángulo ( $V_0 t$ ) + área del triángulo ( $\frac{at \cdot t}{2}$ ), es decir:

$$\bar{X} - \bar{X}_0 = \bar{V}_0 t + \frac{1}{2} \bar{a} t^2, \text{ o bien:}$$

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \bar{V}_0 t + \frac{1}{2} \bar{a} t^2,$$

(2.3)

La gráfica respectiva de (2.3) que corresponde a una parábola, para  $\bar{X} = X_0 \hat{i}$  es:



Por otro lado, de ecuación (2.2), realizando el producto punto  $\vec{v} \cdot \vec{v} = V^2$  resulta:

$$V^2 = V_0^2 + 2\bar{a} \cdot (\bar{X} - \bar{X}_0),$$

(2.4)

lo cual nos da la rapidez  $V$  en términos del desplazamiento  $D = \bar{X} - \bar{X}_0$ . Note que para el caso en que la aceleración es paralela al desplazamiento (movimiento acelerado), la expresión (2.4) se reduce a:  $V^2 = V_0^2 + 2aD$  y cuando la aceleración con el desplazamiento forman  $180^\circ$  (movimiento desacelerado o retardado), (2.4) será:  $V^2 = V_0^2 - 2aD$ .

c. **Caída libre:** El caso más importante de movimiento uniformemente acelerado es el de caída libre bajo la acción de la gravedad. En ausencia de un medio resistente como el aire, es decir en el vacío, el movimiento de caída es de aceleración constante, siendo dicha aceleración la misma para todos los cuerpos, independientemente de cuales sean su forma y su peso. La presencia

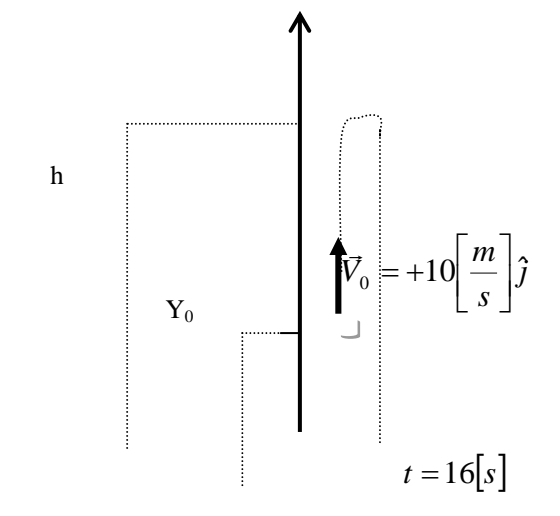
de aire frena ese movimiento de caída y la aceleración pasa a depender entonces de la forma del cuerpo. No obstante, para cuerpos aproximadamente esféricos, la influencia del medio sobre el movimiento puede despreciarse y tratarse, en una primera aproximación, como si fuera de *caída libre*. La aceleración en los movimientos de caída libre, conocida como aceleración de la gravedad, se representa por la letra  $g$  ( $\vec{a} = -g\hat{j}$ ) y toma un valor aproximado de  $9,8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ .

La ley de que los cuerpos caen en el vacío con una aceleración que es la misma para todos ellos e independiente de sus pesos respectivos fue establecida por Galileo Galilei y comprobada mediante un experimento espectacular. Desde lo alto de la torre inclinada de la ciudad italiana de Pisa, y en presencia de profesores y alumnos de su Universidad, Galileo soltó a la vez dos balas de cañón, una de ellas diez veces más pesada que la otra. Con este experimento Galileo planteaba una pregunta directamente a la naturaleza y ella se encargó de responder que, dentro del error experimental, ambos cuerpos, a pesar de las diferencias entre sus pesos, caen a la vez, es decir, recorren el mismo espacio en el mismo tiempo.

- **Ejemplo:**

- Desde un globo que asciende a una velocidad de  $10 \text{ [m/s]}$  se deja caer una piedra que llega al suelo en  $16 \text{ [s]}$ .
  - ¿A qué altura estaba el globo cuándo se soltó la piedra?.
  - ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?.
  - ¿Con qué velocidad llega la piedra al suelo?.

Solución: Supóngase como sistema de referencia, una recta vertical hacia arriba (eje  $Y$ ) con origen en el suelo y el instante  $t=0$  cuando se suelta la piedra:



- Puesto que el globo sube uniformemente con una rapidez de 10 [m/s], para el globo:

$V_0 = 10$  [m/s],  $g = -10$  [m/s<sup>2</sup>] y  $t = 16$  [s] cuando la coordenada Y es igual a cero (piedra llega al suelo).

Usando la ecuación (2.3):

$Y = Y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ ;  $Y = Y_0 + 10t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2$ . Reemplazando  $t = 16$  [s] para  $Y = 0$  y despejando  $Y_0$ :

$$Y_0 = -10 \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 16^2 = 1094,4 \text{ [m]}.$$

- La altura máxima que alcanza la piedra puede ser obtenida usando la ecuación (2.4), donde se cumple que en la altura máxima la final V es cero, es decir:

$$V^2 = V_0^2 - 2a \cdot D; \quad V^2 = 10^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot D, \text{ despejando el desplazamiento D para } V = 0:$$

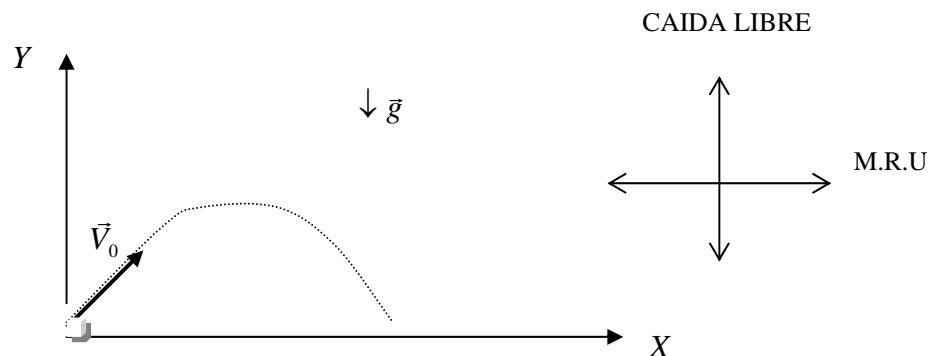
$D = 10^2 / (2 \cdot 9,8) = 5,10$  [m]. De esta forma la altura máxima será  $h = Y_0 + D = 1100$  [m].

- La velocidad con que llega la pelota al suelo es encontrada usando la ecuación (2.2):

$V = V_0 + at$ ;  $V = 10 - 9,8t$ . Reemplazando  $t = 16$  [s], encontramos que  $V = -146,8$  [m/s], donde el signo negativo indica que la velocidad apunta hacia abajo, es decir:

$$\vec{V} = 146,8 \text{ [m/s]} (-\hat{j}).$$

d. **Movimiento en 2 dimensiones:** Un ejemplo en la cual se combinan dos movimientos (una caída libre y un movimiento rectilíneo uniforme), es el caso del movimiento en dos dimensiones o lanzamiento de proyectiles.



El diagrama representa el caso particular de un proyectil disparado con velocidad inicial  $\vec{V}_0$ , la cual forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Puesto que la velocidad inicial  $\vec{V}_0$  se descompone en una componente horizontal  $V_{0x} = V_0 \cos \theta$  y otra vertical  $V_{0y} = V_0 \sin \theta$ ; el movimiento de las coordenadas es dado por:

$$\text{Eje X (M.R.U.): } X = X_0 + V_{0x}t \quad \left. \vphantom{X = X_0 + V_{0x}t} \right\} X = X_0 + V_0 \cos(\theta)t$$

(2.5)

$$\text{Eje Y (Caída libre): } Y = Y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \quad \left. \vphantom{Y = Y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}g \cdot t^2} \right\} Y = V_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

(2.6)

Por otro lado, despejando t de (2.5) y reemplazando en (2.6), encontramos:

$$Y = \operatorname{tg}(\theta)X - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\theta)} X^2$$

(2.7)

Ya que  $V_0, \theta$  y  $g$  son constantes, esta ecuación tiene la forma:  $Y = bX - cX^2$ , la ecuación de una parábola. Por consiguiente la trayectoria del proyectil es parabólica.

Velocidades:

Eje X. Como en tal eje no hay aceleración:

$$V_x = V_{0x} = V_0 \cos(\theta) = \text{constante}$$

(2.8)

Eje Y.

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t = V_0 \sin(\theta) - g \cdot t$$

(2.9)

Cálculos:

- Altura Máxima (H): Significa la altura máxima alcanzada por el proyectil. Esta puede ser determinada usando la ecuación (2.4).

$V_y = 0$  para  $D = H$  (altura máxima). Por lo tanto:  $V_y^2 = V_{0y}^2 - 2gH$ , y

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

(2.10)

De (2.10) note que la altura H será máxima cuándo el  $\sin^2(\theta)$  sea máximo es decir para  $\theta = 90^\circ$ .

- Alcance horizontal máximo (R) : Es la distancia horizontal máxima que puede cubrir el proyectil. Esta distancia se designa con la letra R. Usando la ecuación de la trayectoria, note que  $X= R$  para  $Y=0$ , es decir cuando el proyectil llega al suelo. Reemplazando estos valores en (2.7), luego de ordenar y agrupar resulta:

$$R = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g}$$

(2.11)

El alcance horizontal R será máximo cuando  $\text{sen}(2\theta)$  sea máximo, es decir, igual a uno. Por lo tanto R es máximo para  $\theta = 45^\circ$ .

- Tiempo de vuelo ( $t_v$ ): tiempo que el proyectil permanece en el “aire”. Usando el resultado (2.11) y reemplazándolo en (2.5) obtenemos:

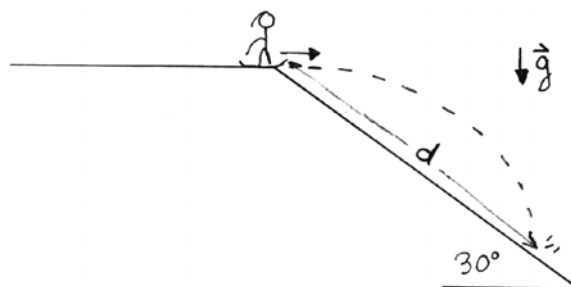
$$t_v = \frac{2V_0 \text{sen}(\theta)}{g}$$

(2.12)

Cabe recordar que estas últimas 3 ecuaciones son particulares para el ejemplo mencionado en el diagrama.

- Ejemplo

Un esquiador abandona la plataforma horizontalmente, como se muestra en la figura. ¿A qué distancia a lo largo de la pendiente de  $30^\circ$  tocará el suelo?. La rapidez de salida del esquiador es de 40 [m/s].



Solución: El punto donde el esquiador toca la pendiente, es la intersección de la parábola

$$Y = (\operatorname{tg}(\theta))X - \frac{g}{2(V_0 \cos(\theta))^2} X^2$$

con la recta  $\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{Y}{X}$  o sea  $Y = -\frac{X}{\sqrt{3}}$ . Como  $\theta = 0^\circ$ , ya que el esquiador sale horizontalmente, la primera ecuación queda

$$Y = -\frac{gX^2}{2V_0^2}$$

por lo tanto

$$X = \frac{2V_0^2}{\sqrt{3}g} \text{ y numéricamente:}$$

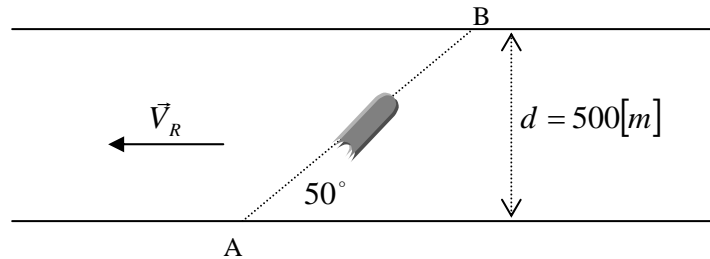
$$X = \frac{2 \cdot 40^2}{\sqrt{3} \cdot 9,8} = 188,52[m]$$

pero  $X = d \cdot \cos(30^\circ)$ , por lo tanto  $d = X \cdot \sec(30^\circ) = 217,69[m]$ .



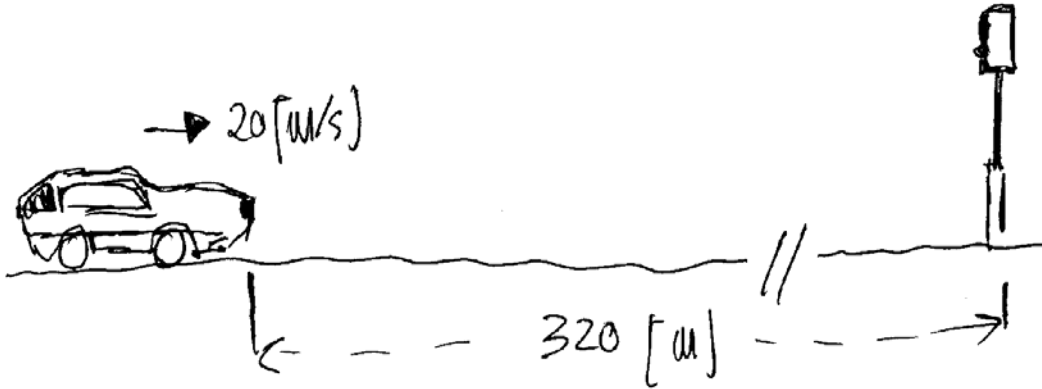
## EJERCICIOS

1. Un bote cruza desde A hasta B manteniendo un ángulo de  $50^\circ$ . El río tiene un ancho  $d = 500$  [m] y la corriente tiene una rapidez  $V_R$  de 3 [km/hr]. Si la rapidez del bote respecto al agua es de 8 [km/hr], calcule el tiempo que emplea el bote en ir desde A a B.

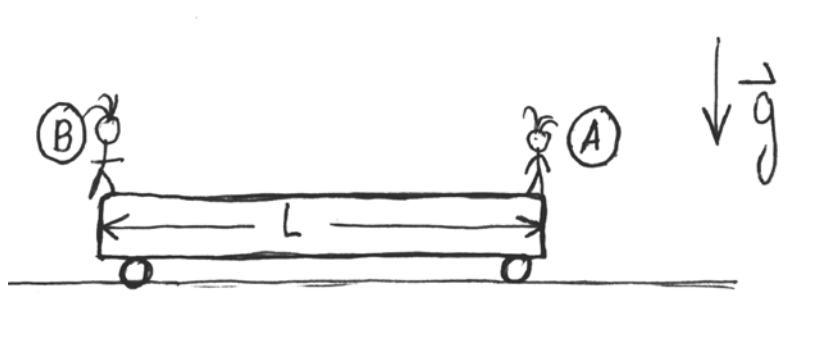


2. En las olimpiadas, un atleta en la prueba de los 100 [m] planos ganó la medalla de plata con un tiempo de 10 [s]. El atleta usó la siguiente estrategia: acelerar uniformemente los dos primeros segundos y luego mantener una rapidez constante hasta el final. Determine:
  - a. rapidez media de su carrera,
  - b. rapidez con que cruza la meta,
  - c. construya los gráficos  $x(t)$ ,  $V(t)$  y  $a(t)$ .
3. La velocidad de un bote de carrera en agua es de 55 [km/hr]. El piloto desea dirigirse a un punto situado a 80 [km]  $S20^\circ E$ . La corriente es muy fuerte a 20 [km/hr] en la dirección  $S70^\circ O$ .
  - a. Calcular en qué dirección debe ser dirigido el bote de modo que se desplace directamente hacia el punto deseado.
  - b. Determine el tiempo requerido para el viaje.
4. Un tren sale de la ciudad A a las 12 del día yendo hacia la ciudad B, situada a 400 [km] de distancia, con rapidez constante de 100 [km/hr]. Otro tren sale de B a las 2:00 p.m. y mantiene una rapidez constante de 70 [km/hr]. Determine la hora en que se encuentran los trenes y la distancia medida a partir de la ciudad A si:
  - a. el segundo tren se dirige hacia A
  - b. el segundo tren se aleja de A.
5. Un ascensor de un edificio está bajando con aceleración constante de  $1,1$  [ $m/s^2$ ] de magnitud. En el instante que la rapidez del ascensor es de  $2,5$  [m/s] cae un tornillo del techo del ascensor, que está a  $3,5$  [m] de su piso. Calcular el tiempo que el tornillo tarda en llegar al piso y la distancia, respecto a un observador en el edificio, recorrida por el tornillo durante ese tiempo.

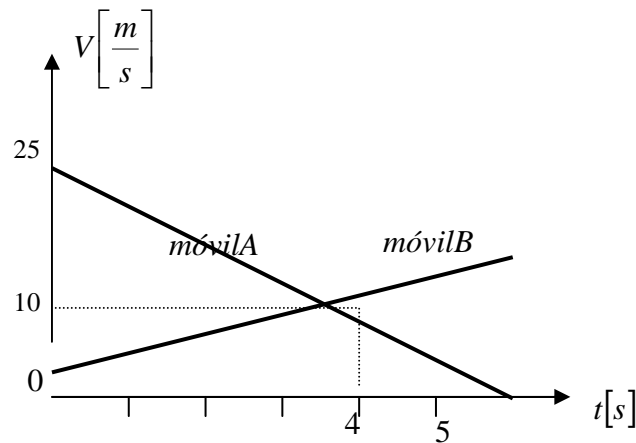
6. Un automóvil viaja a  $20 \text{ [m/s]}$  cuando observa que la luz de un semáforo a  $320 \text{ [m]}$  adelante se pone en rojo. Sabe que el semáforo está programado para estar en rojo durante  $22 \text{ [s]}$ . ¿Qué debe hacer para el semáforo a  $20 \text{ [m/s]}$  en el momento exacto en que se pone la luz verde otra vez?. Trácese la curva  $V$  vs  $t$ , seleccionando la solución para la cual se tengan los valores más pequeños posibles de desaceleración y aceleración, y determine:
- la desaceleración y aceleración,
  - la velocidad mínima alcanzada. JUSTIFIQUE.



7. Dos cuerpos inician una caída libre, partiendo del reposo y desde la misma altura, con un intervalo de tiempo de  $1 \text{ [s]}$ . ¿Cuánto tiempo después de que comienza a caer el primer cuerpo estarán estos separados por una distancia de  $10 \text{ [m]}$ .
8. Dos personas se encuentran separadas en los extremos de un carro de largo  $L = 32 \text{ [m]}$ , que se encuentra en reposo. En el instante en que la persona A lanza verticalmente una pelota con una velocidad de  $40 \text{ [m/s]}$ , el carro parte con cierta aceleración constante. ¿Cuál debe ser la aceleración del carro para que la pelota sea recibida por la persona B?



9. Un paracaidista cae desde un helicóptero “detenido” a 1200 [m] de altura. A los 6 [s] de caer, abre el paracaídas y continua bajando con velocidad constante igual a la que alcanza a los 6 [s]. Dos segundos después de abrir el paracaídas, desde el helicóptero se dispara verticalmente un proyectil. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial del proyectil para que pase frente al paracaídas, cuando se encuentra a 100 [m] de altura?
10. Una llave de agua deja caer gotas a razón de 6 por segundo. El suelo está 20 [m] más abajo. Cuando una gota llega al suelo, ¿a qué distancia del suelo está la siguiente gota?
11. Un trabajador está pintando una viga de un puente que está 23 [m] sobre una línea férrea. Un vagón, con su techo a 3 [m] sobre la línea, avanza con una aceleración de 20 [m/s<sup>2</sup>]. En cierto instante cae una gota de pintura, la que llega al techo del vagón cuando la rapidez de este es de 20 [m/s]. Una segunda gota cae 0,3 [s] después de la primera. Calcule la distancia entre estas gotas sobre el techo del vagón.
12. Dos móviles A y B que se mueven sobre la misma línea recta se encuentran inicialmente en las posiciones  $Y_{0A} = 0$  e  $Y_{0B} = 10[m]$  respectivamente. La relación entre sus velocidades y el tiempo está descrita en el gráfico adjunto:



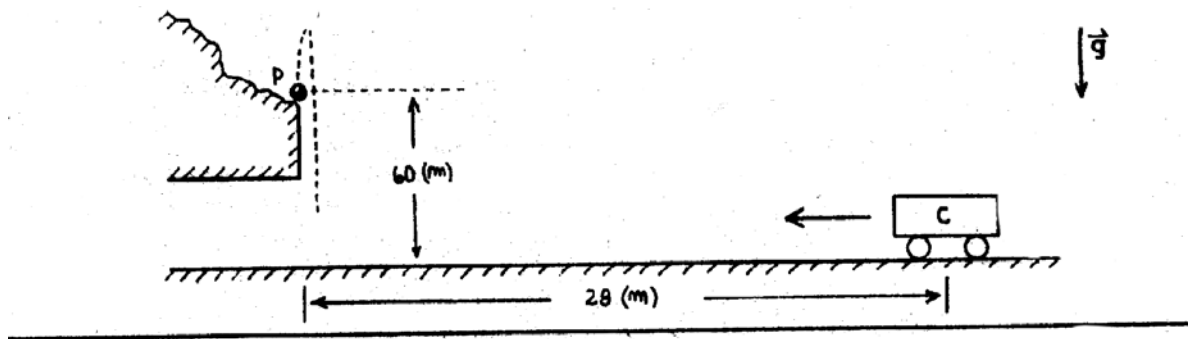
- Con la información dada, determine cuándo y donde se encuentran los móviles.
13. Un cohete que parte del reposo, asciende con una aceleración de  $4 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$  durante 8 [s]. En ese momento agota su combustible y sigue en “caída libre”. En este mismo instante se lanza desde el suelo un proyectil con una rapidez inicial de  $48 \left[ \frac{m}{s} \right]$ . ¿Después de cuánto tiempo de haber partido el cohete y a que altura respecto del suelo se encuentran el proyectil y el cohete?

14. La posición de una partícula está determinada por su vector de posición descrito por:

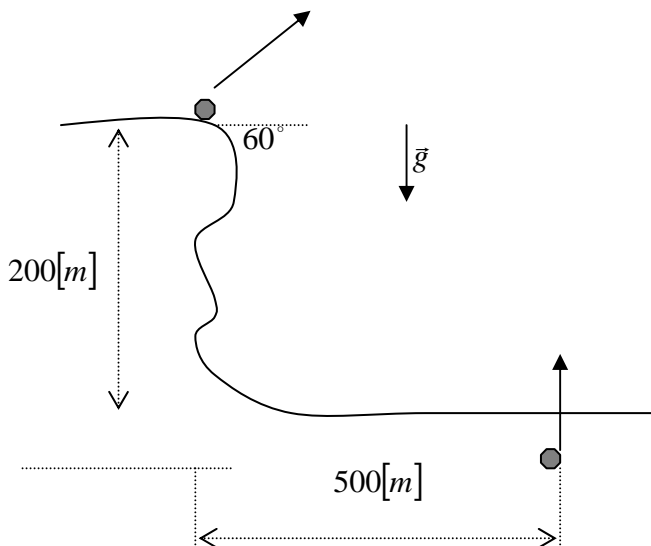
$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 3)\hat{i} - (t^2 + 1)\hat{j} + 4t^2\hat{k} [m].$$

- ¿en que instante el vector posición es  $\perp$  a la aceleración?
- ¿qué ángulo forma la velocidad con el eje X en  $t=1$  [s]?

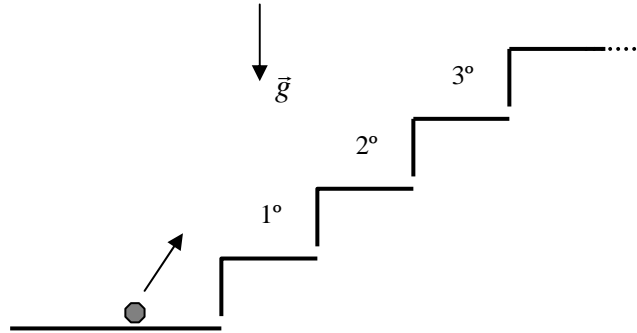
15. En el punto P mostrado en la figura se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial de 20 [m/s]. Si el carro C parte del reposo en el instante en que la piedra se encuentra a su máxima altura, ¿cuál debe ser la aceleración del carro para que la piedra haga impacto en su interior?



Desde el borde de un precipicio de 200 [m] de altura se lanza un proyectil con velocidad inicial de 100 [m/s] formando un ángulo de  $60^\circ$  con respecto a la horizontal. En el mismo instante desde una distancia horizontal de 500 [m] de la base del precipicio se dispara una bala verticalmente hacia arriba. Determine la velocidad con que debe ser disparada la bala de modo que sea interceptada por el proyectil.

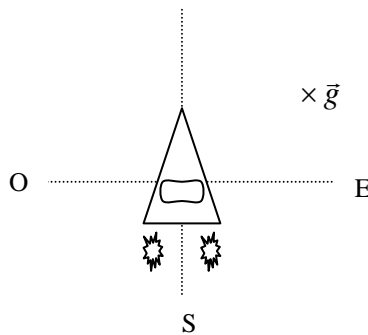


17. Se dispara una pelota con rapidez de 10 [m/s] y formando un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal como se indica. Si cada escalón mide 40 [cm] horizontal por 20 [cm] vertical y la escalera es muy larga, ¿en cuál escalón caerá la pelota?

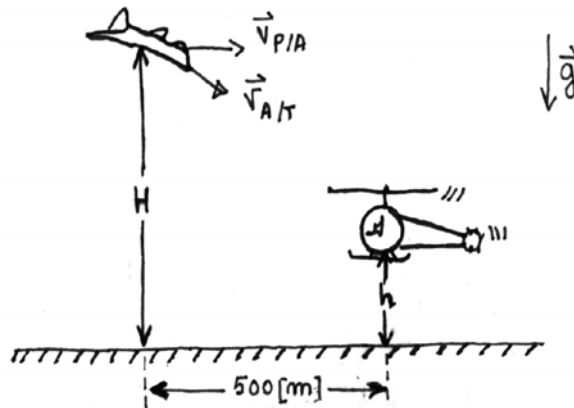


16. Un jugador de fútbol patea una pelota, imprimiéndole una velocidad de 15 [m/s] formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Un defensa que se encuentra delante del jugador corre con rapidez constante de 10 [m/s] al encuentro de la pelota para cabecearla. ¿Qué separación deben tener ambos jugadores en el instante del chute para que el defensa logre cabecear sin saltar?. Considere que la altura del defensa es 1,8 [m]. Interprete sus resultados.

17. Un avión vuela a 320 [m] de altura y dispara horizontalmente un proyectil, el cae en un punto situado a 3000 [m] hacia el Oeste y 2000 [m] hacia el Norte, medidos horizontalmente desde el punto de disparo. Si en el momento del disparo, el avión volaba hacia el Norte con velocidad respecto de tierra de 150 [m/s], determine la velocidad del proyectil respecto al avión.



18. Un avión en picada tiene velocidad respecto de tierra  $\vec{V}_{A/T} = 200\hat{i} - 100\hat{j} \left[ \frac{m}{s} \right]$ . En el instante en que el avión se encuentra a una altura H, dispara un proyectil con una velocidad respecto del avión  $\vec{V}_{P/A} = 150\hat{i} \left[ \frac{m}{s} \right]$ . Simultáneamente un helicóptero sube verticalmente con velocidad constante respecto de tierra de  $\vec{V}_h = \hat{j} \left[ \frac{m}{s} \right]$ . Si el proyectil impacta al helicóptero cuando este se encuentra a una altura h, determine h y H.



19. Un individuo riega un invernadero de 1,8 [m] de altura con una manguera que lanza agua a 10 [m/s] por su boquilla que está a ras de suelo. Determine la máxima distancia horizontal que puede regar el individuo, si no debe mojar el techo.

