1.5 <u>Tipos de magnitudes</u>

Entre las distintas propiedades medibles puede establecerse una clasificación básica. Un grupo importante de ellas quedan perfectamente determinadas cuando se expresa su cantidad mediante un número seguido de la unidad correspondiente. Este tipo de magnitudes reciben el nombre de *magnitudes **escalares***. La longitud, el volumen, la masa, la temperatura, la energía, son sólo algunos ejemplos.

Sin embargo, existen otras que precisan para su total definición que se especifique, además de los elementos anteriores, una dirección o una recta de acción y un sentido: son las llamadas *magnitudes vectoriales* o dirigidas. La fuerza es un ejemplo claro de magnitud vectorial, pues sus efectos al actuar sobre un cuerpo dependerán no sólo de su cantidad, sino también de la línea a lo largo de la cual se ejerza su acción.

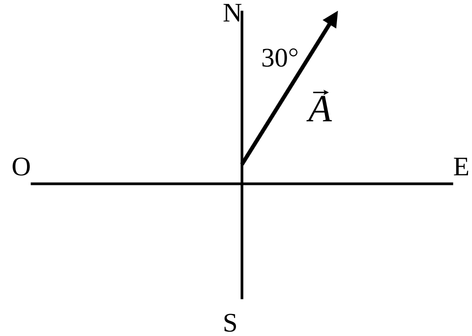
Al igual que los números reales son utilizados para representar cantidades escalares, las cantidades vectoriales requieren el empleo de otros elementos matemáticos diferentes de los números, con mayor capacidad de descripción. Estos elementos matemáticos que pueden representar intensidad, dirección y sentido se denominan ***vectores***.

Las magnitudes que se manejan en la vida diaria son, por lo general, escalares. El dependiente de una tienda de ultramarinos, el comerciante o incluso el contable, manejan masas, precios, volúmenes, etc., y por ello les es suficiente saber operar bien con números. Sin embargo, el físico, y en la medida correspondiente el estudiante de física, al tener que manejar magnitudes vectoriales, ha de operar, además, con vectores.

1.5.1 Representación gráfica de un vector.

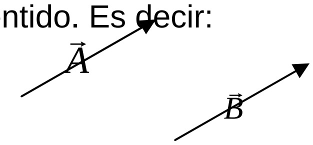
Un vector se representa por una línea orientada, la cual indica la dirección, y por una flecha, la cual indica su sentido. La longitud de la línea es proporcional a la magnitud del vector. Si deseamos representar un vector $\vec{A}$ de magnitud 4 [km] Norte 30° Este:

ESCALA : $^{1\ [km]}/$



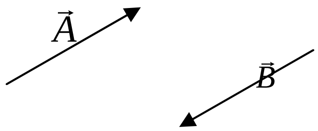
1.5.2 Definiciones:

a. Vectores iguales: Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales si tienen igual tamaño, dirección y sentido. Es decir:



$$(\vec{A} = \vec{B})$$

b. Vectores opuestos: Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son opuestos si tienen igual tamaño, igual dirección pero sentido contrario. Es decir



$$(\vec{A} = -\vec{B})$$

c. Tamaño, norma, módulo o magnitud de un vector: Si $\vec{A}$ representa un vector, su tamaño, norma, módulo o magnitud se designa como:

$$|\vec{A}| = A.$$

1.5.3 Algebra y propiedades entre vectores:

Sean **A**, **B**, **C** vectores y a,b escalares:

i. Propiedad Conmutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

ii. Propiedad Asociativa: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{C} + \vec{A}) + \vec{B}$.

iii. Propiedad Conmutativa: $a\vec{A} = \vec{A}a$.

iv. Propiedad Asociativa: $a(b\vec{A}) = (ab)\vec{A}$.

v. Prop. Distributiva (suma escalar): $(a+b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}$.

vi. Prop. Distributiva (suma vectorial): $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$

vii. Identidad: $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$

viii. Elemento inverso: $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}$.

1.5.4 OPERACIONES ENTRE VECTORES:

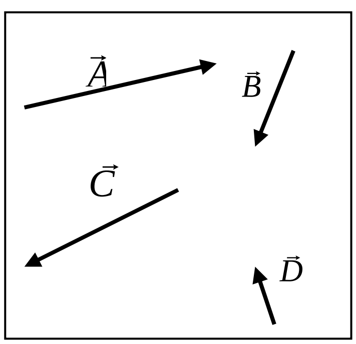
- **Suma y resta entre vectores**

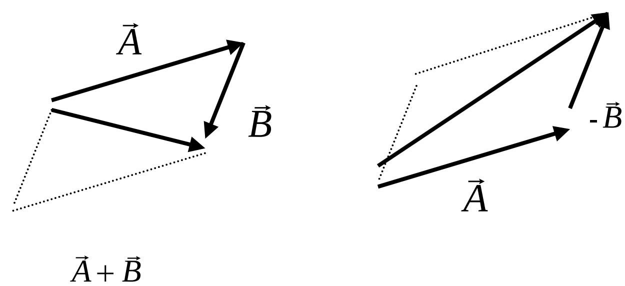
La suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con un origen común *0* se define mediante la llamada *regla del paralelogramo*, según la cual el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ es igual a la diagonal del paralelogramo -considerada como segmento orientado- formado por $\vec{A}$, y sus respectivas paralelas trazadas por los extremos de ambos vectores. Una de las características de la suma vectorial es que el módulo o longitud del vector suma no es igual, en general, a la suma de los módulos de los vectores sumando.
Para el caso de mas de dos vectores, la suma se va realizando de dos en dos sucesivamente.

Como sucede con los números, la diferencia de dos vectores debe entenderse como la suma de uno de ellos con el opuesto del otro:

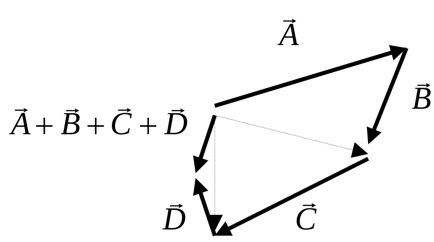
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

(Regla del paralelogramo)



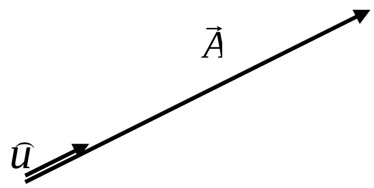


(Regla del polígono)



1.5.5 Vector unitario:

Un vector unitario, representado como $\hat{u}$, es un vector de magnitud 1, usado fundamentalmente para representar la dirección y sentido de un vector.
Sea $\hat{u}$ un vector unitario y $\vec{A}$ un vector cualquiera en la dirección y sentido de $\hat{u}$**.**

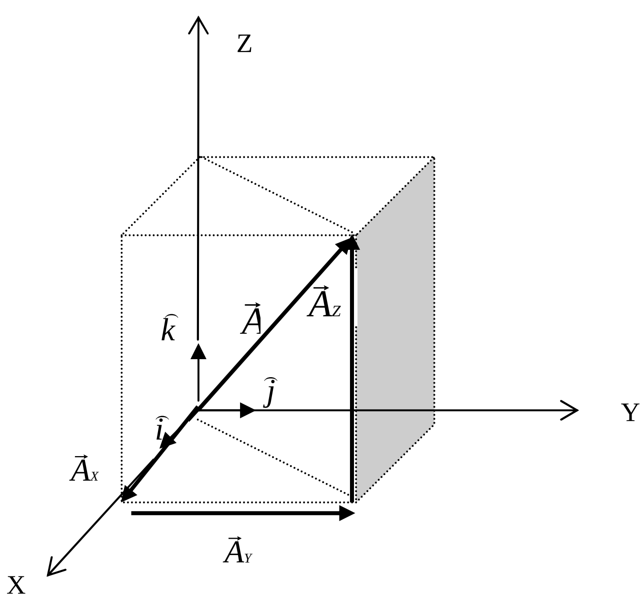


(| $\vec{A}$| = A

Por lo tanto, como $\vec{A}$= A $\hat{u}$, un vector unitario se define como: $\hat{u}$ **=** $\vec{A}$/A.

1.5.6 Componentes de un vector

Cualquier vector $\vec{A}$ puede siempre considerarse como la suma de dos o más vectores. A cualquier conjunto de vectores que al sumarse den $\vec{A}$ se les llama las componentes de $\vec{A}$.
Las componentes mas comúnmente usadas son las cartesianas rectangulares (¿porqué?), es decir, el vector se expresa como la suma de 3 vectores mutuamente perpendiculares.



$\hat{i}$**,** $\hat{j}$,$\hat{k}$ son vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes X, Y y Z respectivamente.

Como $\vec{A} = \vec{A}_X + \vec{A}_Y + \vec{A}_Z$ y $\vec{A}_X = A_X\,\hat{i}$, $\vec{A}_Y = A_Y\,\hat{j}$, $\vec{A}_Z = A_Z\,\hat{k}$

$\vec{A} = A_X\,\hat{i} + A_Y\,\hat{j} + A_Z\,\hat{k}$.
Por otro lado, usando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_X)^2 + (A_Y)^2 + (A_Z)^2} \,.$$

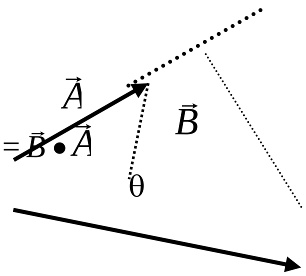
1.6 Producto entre vectores

Es posible definir otras operaciones con vectores, además de la suma. Una de estas operaciones es el producto escalar o punto (el resultado es un **escalar**), otra es el producto vectorial o producto cruz (el resultado es un **vector**).

1.6.1 *Producto Punto*:
Dados 2 vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo θ entre si, el producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ anotado como $\vec{A} \bullet \vec{B}$ es definido por:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A\ B\cos(\theta) = B\ A$$

$\cos(\theta) = \vec{B} \bullet \vec{A}$



Interpretación geométrica: Puesto que Acos(θ) es la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$, $\vec{A} \bullet \vec{B}$ representa B veces proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$, 0 bien A veces la proyección del vector $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$

Producto punto entre vectores unitarios:

$\hat{i} \bullet \hat{i} = \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1.$

$\hat{i} \bullet \hat{j} = \hat{j} \bullet \hat{k} = \hat{k} \bullet \hat{i} = 0.$

- Cuando los vectores están escritos en términos de sus componentes cartesianas rectangulares, es decir:

$\vec{A} = A_X\,\hat{i} + A_Y\,\hat{j} + A_Z\,\hat{k}$ y $\vec{B} = B_X\,\hat{i} + B_Y\,\hat{j} + B_Z\,\hat{k}$, el producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ viene dado por:

$\vec{A} \bullet \vec{B}$ **=** $(A_X\,\hat{i} + A_Y\,\hat{j} + A_Z\,\hat{k}) \bullet (B_X\,\hat{i} + B_Y\,\hat{j} + B_Z\,\hat{k}) = A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z$.

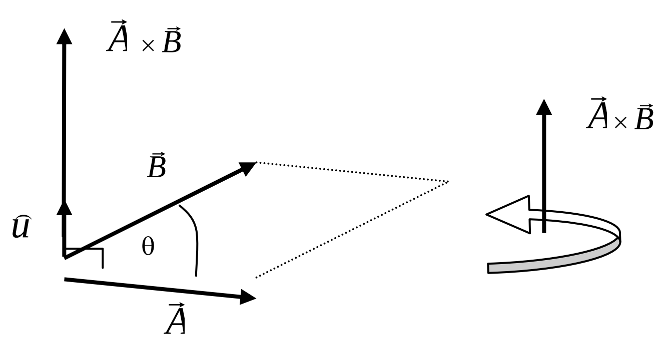
- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores no nulos tales que:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B}$$

1.6.2 ***Producto cruz***:

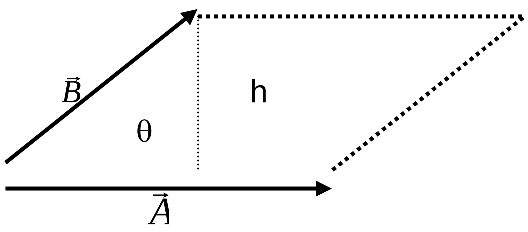
Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores los cuales forman un ángulo θ entre si. El Producto cruz o vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ anotado como $\vec{A} \times \vec{B}$ es dado por:

$\vec{A} \times \vec{B} = A\ B\ \mathrm{sen}(\theta)\,\hat{u}$, donde $\hat{u}$ es un vector unitario $\perp$ a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, o sea $\perp$ al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y cuyo sentido está determinado por la regla de la mano derecha.



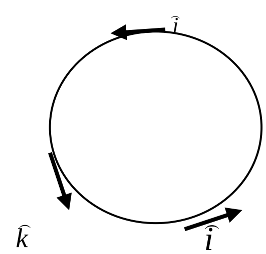
__Interpretación geométrica:__

Con dos vectores podemos formar un paralelogramo, es decir:



Area del paralelogramo = Base · Altura
= (A · h) ; Como h = B sen(θ),
Area del paralelogramo = A · B sen(θ), es decir:
Area del paralelogramo = | $\vec{A} \times \vec{B}$ |

- Note que el producto cruz no es conmutativo. $\vec{A} \times \vec{B}$ = **-** ($\vec{B} \times \vec{A}$).
- Producto cruz entre vectores unitarios:



$\hat{i} \times \hat{i}$ **=** $\hat{j} \times \hat{j}$ **=** $\hat{k} \times \hat{k}$ **=** $\vec{0}$ **.**
$\hat{i} \times \hat{j}$ **=** $\hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{i}$ **= -** $\hat{k}$ **.**
$\hat{j} \times \hat{k}$ **=** $\hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{j}$ **= -** $\hat{i}$ **.**
$\hat{k} \times \hat{i}$ **=** $\hat{j}$, $\hat{i} \times \hat{k}$ **= -** $\hat{j}$

Cuando los vectores están escritos en términos de sus componentes cartesianas rectangulares, es decir:

$\vec{A} = A_X \hat{i} + A_Y \hat{j} + A_Z \hat{k}$ y $\vec{B} = B_X \hat{i} + B_Y \hat{j} + B_Z \hat{k}$, el producto cruz entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ viene dado por:

$\vec{A} \times \vec{B}$ **= (** $A_x \hat{i} + A_Y \hat{j} + A_Z \hat{k}) \times (B_X \hat{i} + B_Y \hat{j} + B_Z \hat{k}) = \hat{i} (A_Y B_Z - A_Z B_Y) - \hat{j} (A_X B_Z - A_Z B_X) + \hat{k} (A_X B_Y - A_Y B_X)$, es decir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores no nulos tales que:

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos ($\theta = 0^\circ$).

EJERCICIOS

1. Para dos vectores dados, ¿Cuándo su producto vectorial es mínimo y porqué?.

2. ¿El módulo de la suma de dos vectores dados siempre será menor que el módulo de la diferencia de esos vectores?.

3. ¿En que casos el módulo de la suma de dos vectores coincide con la suma de los módulos de los vectores que se suman?.

4. Un vector $\vec{A}$ tiene de componentes (1,2,3). Otro vector $\vec{B}$ de módulo $3^{1/2}$ tiene por componente X el valor 1. Determinar el vector $\vec{B}$ para que sea perpendicular al vector $\vec{A}$.

5. Dado los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$:

a. Encuentre el ángulo formado por tales vectores.
b. Para el vector $\vec{A}$, determine los ángulos α, β y γ que forma el vector con los ejes X, Y y Z respectivamente.
c. Muestre que en general, para cualquier vector: $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$. Tales cosenos se denominan directores pues definen su dirección con respecto a los ejes coordenados.

6. Encontrar las componentes rectangulares de un vector de 10 unidades de magnitud, cuando éste forma un ángulo, con respecto al eje de las X de:
   a. 50°
   b. 130°
   c. 230°, haciendo uso de las funciones trigonométricas.

7. Sean 4 vectores $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ y $\vec{H}$ ubicados consecutivamente, de tal forma que $\vec{H}$ hace un ángulo de 65° con $\vec{G}$; el vector $\vec{G}$ forma 67° con $\vec{F}$ y $\vec{F}$ hace 85° con $\vec{E}$**.** Las magnitudes de cada vector son de 9 unidades.

a. Represente gráficamente estos cuatro vectores, según los datos dados,

b. Construir el vector: $\vec{I} = \vec{E} + 2\vec{F} - 3\vec{G} + \vec{H}$.

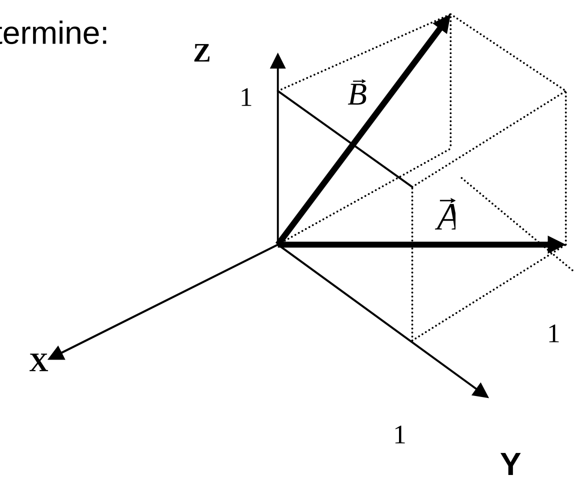
8. Un buque se dispone a zarpar hacia un punto situado a 124 [km] al Norte. Una tormenta inesperada empuja el buque hasta un punto 72 [km] al Norte y 31 {km} al Este desde su punto de arranque. ¿Qué distancia y en qué dirección debe navegarse, para llegar a su destino original?.

9. Para los vectores de la figura (cubo de lado 1), determine:

a. $\vec{A}+\vec{B}$.

b. $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$.

c. $\vec{A}\bullet\vec{B}$.



10. Dado los vectores:

$\vec{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, determine:

a. $\vec{A}\bullet\vec{B}$

b. Vector unitario en la dirección y sentido de: $\vec{A}+\vec{B}$.

11. Hallar un vector unitario, paralelo al plano XY que sea perpendicular al vector: $-8\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

12. ¿Para que valores de α son $\vec{K} = \alpha\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{L} = 2\alpha\hat{i} + \alpha\hat{j} - 4\hat{k}$, perpendiculares?.

13. Dados los vectores $\vec{U} = \alpha\hat{i} + 4\hat{j}$ y $\vec{V} = 9\hat{i} + 12\hat{j} + \beta\hat{k}$, encontrar los valores de α y β de manera que ambos vectores sean paralelos.

14. Un vector $\vec{A}$ de módulo 5 unidades forma un ángulo de 30° con el eje Z. Su proyección sobre el plano XY forma un ángulo de 60° con el eje X. Hallar el vector $\vec{A}$ y el ángulo que forma con el vector $\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j}$.