Material de Apoyo

FUND. MATEM.

Prof. Haroldo Cornejo Olivarí

LOS NÚMEROS

El concepto de número en la sociedad actual nos es tan familiar que es difícil concebir hoy en día que el proceso de abstracción y construcción del sistema numérico y su aritmética ha sido largo y lento.

El proceso más interesante es el aprendizaje del conteo. En la época de los romanos, los cabreros utilizaban piedrecillas para contar sus rebaños.

Esta acción puede abstraerse a términos matemáticos estableciendo una aplicación biunívoca entre el objeto "piedra" y el objeto a contar, en este caso "una cabra", si se establece que existen tantas piedras como cabras, entonces, nuestro conteo es correcto, eso se denomina establecimiento de una biyección entre dos conjuntos equipotentes.

En pleno siglo XIX, muchas doncellas de la aristocracia inglesa no sabían contar, pero enseguida se daban cuenta si faltaban cubiertos o algún comensal no tenía asiento.

Muchas sociedades menores en sus respectivos idiomas tienen palabras para designar al número "uno", "dos" e incluso "tres", pero más allá, se dice "muchos", es decir, no hay un sistema numérico formalizado.

No obstante, ha servido de base, el uso de los dedos de las manos, de los pies, e incluso de las partes del cuerpo, para contar.

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de números que guardan una serie de propiedades estructurales. Sus características estructurales más importantes son:

- No son conjuntos finitos
- Dotados de operadores, admiten estructura algebraica estable
- Están dotados de propiedades topológicas (o pueden llegar a estarlo)
- Admiten relación de orden
- Admiten relación de equivalencia
- Son representables mediante diagramas de Euler y diagramas de Venn, pudiéndose tomar una combinación de ambos en un diagrama de Euler-Venn con la forma característica de cuadrilátero y además pudiéndose representar internamente un diagrama de Hasse (es una recta).
- Todos los conjuntos numéricos se construyen desde una estructura más simple hasta otra más compleja.
- El orden de construcción de los conjuntos numéricos (de menor a mayor complejidad) es el siguiente:

N: Conjunto de los números naturales
Z: Conjunto de los números enteros
Q: Conjunto de los números racionales
R: Conjunto de los números reales
C: Conjunto de los números complejos

- Todos los conjuntos numéricos son a su vez, subconjuntos del Conjunto C de los números complejos, que sería el Universo de los Números.

Conjunto $\mathbb{N}$ de los Naturales

Surgieron en el proceso de aprendizaje que tuvo el hombre cuando descubrió la forma de contar. Son los números más simples de los que hacemos uso, están formados por los números 1,2,3,4,5...

El conjunto de los números naturales, se define por extensión de esta forma:

IN = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …………. }

Su construcción axiomática parte de los axiomas de Peano, que a partir de un primer elemento, el uno, se genera el elemento siguiente, y el siguiente del siguiente, de tal forma que obtenemos un conjunto, que si bien está acotado inferiormente (es la única excepción existente entre los conjuntos numéricos), no lo está superiormente, por lo que podemos conjeturar que este conjunto tiene un número infinito de elementos.

NÚMEROS Z ENTEROS:

Surgen por la necesidad que tuvo el hombre de expresar situaciones tales como: Temperaturas bajo cero, deudas, posiciones bajo el nivel del mar (10 pies bajo el nivel del mar, por ejemplo). Aparecen los Inversos aditivos de los Naturales y el Cero.

El conjunto de los Enteros se denotan por **Z** y están formados por los números Naturales, el cero y los inversos aditivos de los naturales.

Por extensión, sería aproximadamente: **Z** = { ……. –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …..}
El conjunto de los números enteros incluye a los naturales. Los naturales son un subconjunto de los enteros.

NÚMEROS Q RACIONALES:

Surgen por la necesidad que tuvo el hombre de tomar algunas partes de la unidad. Se denotan por y son todos aquellos fraccionarios que se pueden expresar de la forma donde p y q son enteros y , como por ejemplo: 3/5, - 2/3. etc. En general:

Los números enteros son también racionales porque se les puede colocar como denominador la unidad (1).

También se consideran números racionales los siguientes decimales:

a) Los decimales finitos: aquellos que tienen un número finito de cifras decimales, como por ejemplo: 0.23, 2.3, - 0.324

b) Los decimales infinitos periódicos puros (d.i.p.p.): Aquellos que tienen un número infinito de cifras decimales y cuyas cifras decimales se repiten, como por ejemplo: 0.2222… ,0.3535353… ,2.3333…, - 1,7777…

c) Los decimales infinitos periódicos mixtos (d.i.p.m.): Aquellos que tienen un número finito de cifras decimales que no se repiten y a continuación un número infinito de cifras decimales que se repiten, como por ejemplo: 0.23333…, 0.2355555…., - 0.32424242…, 3.25555…., - 1.2345454…

Todos estos decimales son racionales porque cada uno de ellos se origina al dividir dos números enteros. La fracción que los origina se denomina fracción generatriz.

El conjunto de los números racionales incluye a los enteros.

NÚMEROS Q’ IRRACIONALES:

Surgen por la necesidad de encontrar la medida exacta de la hipotenusa de un triángulo rectángulo; así mismo de la necesidad de expresar las raíces inexactas reales. Se denotan por Q’ y son todas las raíces inexactas reales y los decimales infinitos no periódicos, como por ejemplo:

$\sqrt{2}$ =1,414213562…, π = 3.14157… , e = 2,71828 18284……

NÚMEROS IR REALES

Surgen de la necesidad de reunir los racionales y los irracionales en un solo conjunto. Se denotan por IR.

NÚMEROS IR’ IMAGINARIOS:

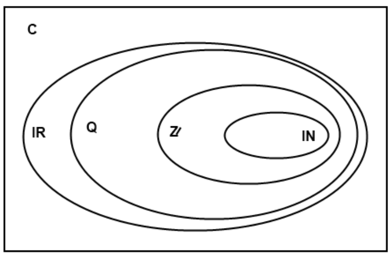
Surgen por la necesidad de obtener las raíces de índice par de cantidades negativas. Se denotan por i. La unidad de los números imaginarios es la raíz cuadrada de – 1 y se denota por i:

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$$

Se debe tener en cuenta que:

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$$
$$\mathbf{i^2 = -1}$$
$$\mathbf{i^3 = -i}$$
$$\mathbf{i^4 = 1}$$

La unión de los números reales con los imaginarios dan origen a los números complejos notados **C**, así que: **C** = **IR** U **IR’**.



Observar bien que: **N** $\subset$ **Z** $\subset$ **Q** $\subset$ **R** $\subset$ **C.**

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

Con los **números naturales no** era posible realizar **diferencias (restas) donde el minuendo era menor que el que el sustraendo**, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor.

En la resta A – B se tiene que A= **Minuendo** B = **Sustraendo**

Por ejemplo, la necesidad de representar **el dinero adeudado, temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar**, etc.

Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo **conjunto** numérico llamado **números enteros**.

El conjunto de los números enteros está formado por:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$$

Es decir, **los naturales, sus opuestos (negativos) y el cero.** Se dividen en tres partes: **enteros positivos o números naturales, enteros negativos y el cero.**

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Dado que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a **los números naturales como un subconjunto de los enteros**.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un **número entero** es el **número natural** que resulta al suprimir su **signo**. Algebraicamente se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Orden en los números enteros:

Los números enteros están ordenados. De dos números representados gráficamente, es **mayor** al que él está situado más a la **derecha**, y **menor** el situado más a la **izquierda.**

Criterios para ordenar los números enteros

1. **Todo número negativo es menor que cero.** $-7 < 0$
2. **Todo número positivo es mayor que cero.** $7 > 0$
3. **De dos enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.**

$-7 > -10$ $|-7| < |-10|$

4. De los enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

$$10 > 7 \qquad |10| > |7|$$

Suma de números enteros

1. **Si los sumandos son del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el signo común.**

$$3 + 5 = 8$$
$$(-3) + (-5) = -8$$

2. **Si los sumandos son de distinto signo, se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le pone el signo del número de mayor valor absoluto.**

$$-3 + 5 = 2$$
$$3 + (-5) = -2$$

Propiedades (Axiomas) de la suma de números enteros

1. **Clausura o Interna**:
El resultado de sumar dos números enteros es otro número entero.

$$\mathbf{a + b \in \mathbb{Z}}$$
$$\mathbf{3 + (-5) \in \mathbb{Z}}$$

2. **Asociativa**:
El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$
$$(2 + 3) + (-5) = 2 + [3 + (-5)]$$
$$5 - 5 = 2 + (-2)$$
$$0 = 0$$

3. **Conmutativa**:
El orden de los sumandos no varía la suma.

$$\mathbf{a + b = b + a}$$
$$2 + (-5) = (-5) + 2$$
$$-3 = -3$$

4. **Elemento Neutro Aditivo**:
El **0** es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

$$\mathbf{a + 0 = a}$$
$$(-5) + 0 = -5$$

5. **Aditivo Inverso u opuesto:**
Un número es el aditivo Inverso del otro si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.

$$\mathbf{a + (-a) = 0}$$
$$5 + (-5) = 0$$

El Inverso Aditivo del Inverso Aditivo de un número es igual al mismo número.

$$-(-5) = 5$$

La resta de números enteros se obtiene sumando al minuendo el Aditivo Inverso del sustraendo.

$$\mathbf{a - b = a + (-b)}$$
$$7 - 5 = 2$$
$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$$

Propiedades de la resta de números enteros

1. Clausura o **Interna**:
La **resta dos números enteros** es otro **número entero**.

$$\mathbf{a - b} \in \mathbb{Z}$$
$$10 - (-5) \in \mathbb{Z}$$

2. **No es Conmutativa**:

$$\mathbf{a - b \neq b - a}$$
$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

Multiplicación de números enteros

La **multiplicación** de varios **números enteros** es otro **número entero**, que tiene como **valor absoluto el producto de los valores absolutos** y, como **signo**, el que se obtiene de la aplicación de la **regla de los signos**.

Regla de los signos

+ por + = +
- por - = +
+ por - = -
- por + = -

$$2 \cdot 5 = 10$$
$$(-2) \cdot (-5) = 10$$
$$2 \cdot (-5) = -10$$
$$(-2) \cdot 5 = -10$$

Propiedades (Axiomas) de la multiplicación de números enteros

1. **Clausura o Interna**:

El resultado de **multiplicar dos números enteros** es otro **número entero**.

$$\mathbf{a \cdot b \in \mathbb{Z}}$$

$$2 \cdot (-5) \in \mathbb{Z}$$

2. **Asociativa:**

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son **números enteros** cualesquiera, se cumple que:

$$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

$$(2 \cdot 3) \cdot (-5) = 2 \cdot [(3 \cdot (-5)]$$

$$6 \cdot (-5) = 2 \cdot (-15)$$

$$-30 = -30$$

3. **Conmutativa:**

El orden de los factores no varía el producto.

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

$$2 \cdot (-5) = (-5) \cdot 2$$

$$-10 = -10$$

4. **Elemento neutro Multiplicativo**:

El **1** es el **elemento neutro** de la **multiplicación** porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$\mathbf{a \cdot 1 = a}$$

$$(-5) \cdot 1 = (-5)$$

5. **Distributiva respecto a la suma**:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

$$(-2) \cdot (3 + 5) = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5$$

$$(-2) \cdot 8 = (-6) + (-10)$$

$$-16 = -16$$

6. **Sacar factor común:**

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$\mathbf{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$$

$$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = (-2) \cdot (3 + 5)$$

División de números enteros

La división de dos números enteros es igual al valor absoluto del cociente de los valores absolutos entre el dividendo y el divisor, y tiene de signo, el que se obtiene de la aplicación de la misma regla de los signos que en el producto.

Regla de los signos

+ entre + = +
- entre - = +
+ entre - = -
- entre + = -

$$10 : 5 = 2$$
$$(-10) : (-5) = 2$$
$$10 : (-5) = -2$$
$$(-10) : 5 = -2$$

Propiedades de la división de números enteros

1. **No es una operación interna, No cumple la propiedad de Clausura**:
El resultado de **dividir dos números enteros** no siempre es otro **número entero**.

$$(-2) : 6 \notin \mathbb{Z}$$

2. **No es Conmutativa**:

$$\mathbf{a : b \neq b : a}$$
$$6 : (-2) \neq (-2) : 6$$