Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, que tiene 2 soluciones o raíces

Se resuelve mediante la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2: Las soluciones de la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$ son:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ejemplo 3: En la ecuación $-x^2 + 7x - 10 = 0$

Si $a<0$, podemos multiplicar los dos miembros por (-1).

$$(-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Estudio de las soluciones de la ecuación de 2º grado:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac = \Delta$ se llama **DISCRIMINANTE** de la ecuación porque permite discriminar o averiguar en cada ecuación cómo son las dos soluciones.

Podemos distinguir tres casos:

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos raíces reales distintas.
Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos raíces reales e iguales.
Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones reales, tiene 2 complejas.

Ejemplo 3: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Dos raíces reales y distintas, que nos permite factorizar el polinomio $(x - 3)(x - 2)=0$

Ejemplo 4: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ son:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Dos raíces reales e iguales, que nos permite factorizar el polinomio $(x - 1)(x - 1)=0$

Ejemplo 5: Las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{1} \notin \mathbb{R}$$

Dos raíces complejas

Propiedades de las soluciones de la ecuación de 2º grado:

- La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si conocemos las raíces de una ecuación, podemos escribir ésta como:

$$X^2 - Sx + P = 0$$

Ejemplo 6: La ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y −2.

$$S = 3 - 2 = 1$$
$$P = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\mathbf{x^2 - x + 6 = 0}$$

Ec. de segundo grado incompletas

Se dice que una ecuación de segundo grado es incompleta cuando alguno de los coeficientes, b o c, o ambos, son iguales a cero.

Por ejemplo:

$ax^2 = 0$

$ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + c = 0$

Resolución de ec. de segundo grado incompletas

- **$ax^2 = 0$** La solución es x = 0.

Ejemplos:

$2x^2 = 0 \rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$

$\frac{2}{5}x^2 = 0 \rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$

- **$ax^2 + bx = 0$**

Extraemos factor común x:

$$x(ax + b) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Ejemplos: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 0$ son:

$x(x - 5) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ y $x - 5 = 0$

$x_1 = 0$ y $x_2 = 5$

Las soluciones de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$ son:

$2x(x - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0$ y $x - 3 = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

- **$ax^2 + c = 0$**

Despejamos: $x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0$

Factorizando la diferencia de cuadrados $\left[x - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\right]\left[x + \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\right] = 0$

De donde $x_1 = \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ y $x_2 = -\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$

Ejemplo: $2x^2 - 25 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+5)(x-5)=0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 5$ y $x_2 = -5$

$2x^2 + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - (-4)=0 \quad \rightarrow \quad x^2 - (\sqrt{-4})^2 = 0$

$(x - 2\sqrt{-1})(x + 2\sqrt{-1}) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2i$ y $x = -2i$

donde $\sqrt{-1}=$**i** (unidad imaginario)