CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

En la Unidad anterior recordaste y trabajaste con los números enteros pero, a medida que ha progresado la Humanidad, el hombre se ha enfrentado a situaciones problemáticas que consideran la idea de fracciones o partes de una unidad entera como las que se señalan a continuación:

Situación 1: Un hacendado tenía una hacienda de 200 hectáreas y vendió un sexto de 48 hectáreas. ¿Qué parte o fracción de la finca le queda?

Situación 2: Un caballo, que costó US$ 1.250, se vende por los 2/5 de su costo. ¿Cuánto dinero se pierde?

Situación 3: De una hacienda de 500 Hectáreas se cultivan tres vigésimas partes; se alquila una décima parte y el terreno restante se vende a US$ 500 la hectárea. ¿Cuánto es el dinero obtenido por la venta?

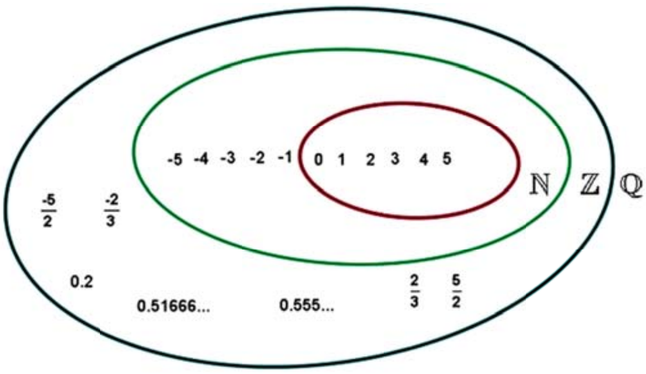
Situación 4: En un colegio hay 42 alumnos varones que representan los 3/13 del total de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en total y cuántos de ellos son mujeres?

Se llama **número racional** a todo aquel **número** que se puede representar como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero.

Se representa por **Q**.

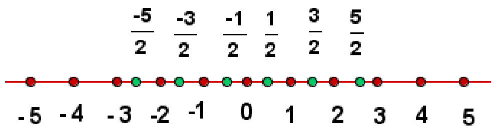
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}; \ b \in \mathbb{Z}; \ b \neq 0 \right\}$$

Donde **a = Numerador** **b = denominador**



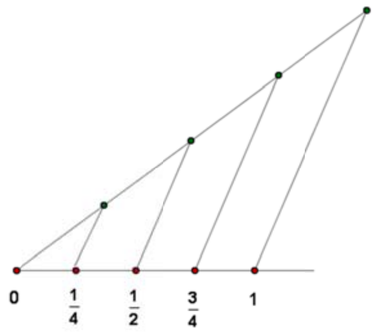
Representación de los números racionales

Los **números racionales** se representan en la recta numérica junto a los **números enteros**.



Para **representar** con precisión los **números racionales**:

1.- Tomamos un segmento de longitud la unidad, por ejemplo.
2.- Trazamos un segmento auxiliar desde el origen y lo dividimos en las partes que deseemos. En nuestro ejemplo, lo dividimos en 4 partes.
3.- Unimos el último punto del segmento auxiliar con el extremo del otro segmento y trazamos segmentos paralelos en cada uno de los puntos, obtenidos en la partición del segmento auxiliar.



A menudo se utilizan **número racional** y **fracción** como **sinónimos**, aunque no siempre corresponde, dado que hay fracciones que son irracionales, dependiendo su estructura.

Amplificación de un racional: Es la multiplicación del numerador y denominador de la fracción por un mismo número, **sin alterar su valor o representatividad**.
Ejemplos:

$$\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{6}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{10}=\frac{30}{50}$$

Simplificación de un racional: Es la división del numerador y denominador de la fracción por un mismo número, **sin alterar su valor o representatividad**.
Ejemplos:

$$\frac{15}{18}=\frac{15\div 3}{18\div 3}=\frac{5}{6}$$

Suma y resta de números racionales

Para sumar o restar racionales, estos deben tener el mismo denominador

Se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$
$$\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Con distinto denominador

En primer lugar se transforman los denominadores a un común denominador (amplificando cada fracción), y se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2}=\frac{5\cdot 3}{12}+\frac{1\cdot 2}{12}=\frac{5\cdot 3+1\cdot 2}{12}=\frac{17}{12}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2}=\frac{15}{12}-\frac{2}{12}=\frac{15-2}{12}=\frac{13}{12}$$

Para encontrar el Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.) o Mínimo Común Denominador (M.C.D.)

1º Se descompone cada denominador en sus factores primos

2º Se expresan en forma de potencias agrupando aquellas de igual base.

3º Se eligen todas las potencias existentes con el mayor de los exponentes.

4º El producto de dichas potencias (3º) es el M.C.M.

Ejemplos:

El **M.C.M.** entre 4 y 6 es:

$4 = 2^2$

$6 = 2 \cdot 3$

En esta dupla de números existen las potencias de 2 y 3 las cuales con sus máximos exponentes nos entrega el **M.C.M.** = $2^2 \cdot 3$ = **12**

El **M.C.M.** entre 12, 16 y 10 será:

$12 = 2^2 \cdot 3$

$16 = 2^4$ **M.C.M.** = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

$10 = 2 \cdot 5$

(habitualmente no es recomendable multiplicar los factores)

El **M.C.M.** entre 18, 24 y 16 será:

$18 = 3^2 \cdot 2$

$16 = 2^4$ **M.C.M.** = $2^4 \cdot 3^2 = 144$

$24 = 2^3 \cdot 3$

El **M.C.M.** entre 36, 24 y 20 será:

$36 = 3^2 \cdot 2^2$

$20 = 2^2 \cdot 5$ **M.C.M.** = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

$24 = 2^3 \cdot 3$

El **M.C.M**. entre $\Delta^3\cdot\#^2$, $\Delta\cdot\#^2$, $\Delta^2\cdot\#$ es $\boldsymbol{\Delta^3\cdot\#^2}$

El M.C.M. entre:

$(x + 1)^2$

$(x + 1)(x - 1)^3$ **M.C.M. =** $(x - 1)^3(x + 1)^2$

$(x - 1)(x + 1)$

Comparación de fracciones

Fracciones con igual denominador

De dos fracciones que tienen el **mismo denominador** es **menor** la que tiene **menor numerador.**

Fracciones con igual numerador

De dos fracciones que tienen el **mismo numerador** es **menor** la que tiene **mayor denominador.**

Con numeradores y denominadores distintos

En primer lugar las tenemos que poner a **común denominador**, buscando el M.C.D. y amplificando individualmente cada una de las fracciones a comparar.

Es menor la que tiene menor numerador (de las fracciones amplificadas).

Producto de números racionales

El producto de dos **números racionales** es **otro número racional** que tiene:

Por **numerador el producto de los numeradores**.

Por **denominador el producto de los denominadores**.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{donde } b\neq 0 \qquad y \qquad d\neq 0$$

Recordar que cualquier **entero** se puede representar como **racional dividiéndolo por 1**

Ejemplos:

$$3=\frac{3}{1} \qquad x=\frac{x}{1} \qquad -5=\frac{-5}{1}$$

División de números racionales

Si recordamos que toda división es equivalente a multiplicar por el Inverso multiplicativo (o recíproco del número), y el recíproco de una fracción o racional es la fracción invertida.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Podría quedar más evidente la regla:

“Para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la segunda invertida”.